MATEMÁTICAS CCSS JUNIO 2010 (ESPECÍFICO MODELO 4) SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(2'5 puntos) Un comerciante quiere dar salida a 400 kg de avellanas, 300 kg de nueces y 400 kg de almendras. Para ello hace dos tipos de lotes: los de tipo A contienen 2 kg de avellanas, 2 kg de nueces y 1 kg de almendras; y los de tipo B contienen 3 kg de avellanas, 1 kg de nueces y 4 kg de almendras. El precio de venta de cada lote es de 20 euros para los del tipo A y de 40 euros para los del tipo B. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe vender para obtener el máximo ingreso y a cuánto asciende éste?

Solución

Llamamos "x" al número de lotes del tipo A.
Llamamos "y" al número de lotes del tipo B.
Para determinar las inecuaciones y la función Beneficio F(x,y), ponemos un cuadro de doble entrada que nos lo simplificará.

Llamamos "x" al número de lotes del tipo A.

	Tipo A	Tipo B	Máximo
Avellanas	2	3	400
Nueces	2	1	300
Almendras	1	4	400
Beneficio	20€	40€	20x + 40y

Teniendo en cuenta lao anterior tenemos las siguientes inecuaciones:

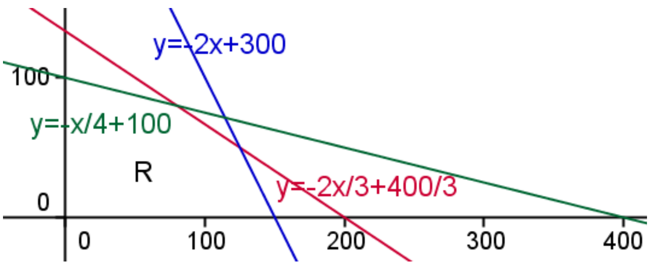
$$2x + 3y \le 400; \quad 2x + y \le 300; \quad x + 4y \le 400; \quad y \ge 0; \quad x \ge 0$$

La función beneficio es F(x,y)) = 20x + 40y

Para dibujar la región factible o recinto, de cada inecuación despejamos la incógnita "y" para dibujar la recta correspondiente, y después observando las inecuaciones tendremos la región factible que indicaremos con la letra "R".

$$y = (-2/3)x + 400/3;\ y = -2x + 300\ ;\ y = -x/4 + 100;\ y = 0 \text{ (eje OX)};\ x = 0 \text{ (eje OY)}$$

Dibujamos las rectas

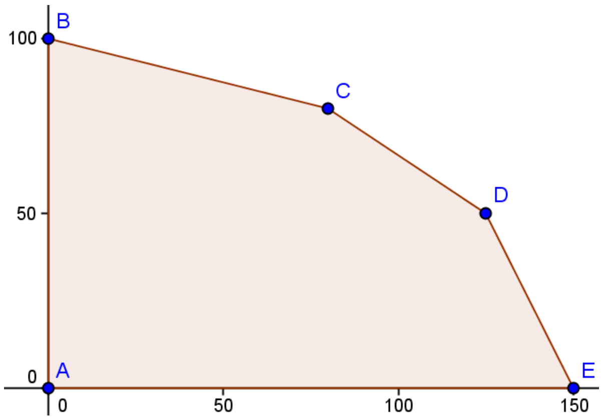


Si nos fijamos en las desigualdades se ve cual es el recinto (es una región cerrada en este caso), o región factible.

Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x=0 e y=0, Tenemos el punto de corte es A(0,0)
De x=0 e y = -x/4 + 100, tenemos y = 100, y el punto es B(0,100)
De y=-x/4+100 e y=-2x/3 + 400/3, tenemos -x/4+100=-2x/3 + 400/3, es decir (-3x+1200)/12 =(-8x+1600)/12, por tanto 5x=400, de donde x=80. Entrando con este valor en y=-x/4+100, tenemos y = -80/4 +100 = 80, y el punto de corte es C(80, 80)
De y=-2x/3+400/3 e y=-2x + 300, tenemos -2x+400=-6x + 900/3, es decir 4x=500, de donde x=125. Entrando con este valor en y=-2x + 300, tenemos y = -2(125) +300=50, y el punto de corte es D(125,50)
De y=0 e y=-2x+300, Tenemos 0 = -2x+300, de donde "x = 150", y el punto de corte es E(150,0)

El recinto con sus vértices A(0,0), B(0,100), C(80,80), D(125,50 y E(150,0) es:



Consideremos la función beneficio F(x,y) = 20x + 40y.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza su máximo (mínimo) absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto (o en un segmento, si coincide en dos vértices consecutivos), por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

F(0,0) = 20.0 + 40.0 =0, F(0,100)= 20.0 + 40.100 =4000, F(80,80)= 20.(80)+40.(80)=4800,
F(100,0)= 20(100) + 40(0) =2000.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el máximo absoluto de la función F en la región es 4800€ (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el punto (80,80), es decir para obtener el mayor beneficio hay que realizar 80 lotes del tipo A y otros 80 lotes del tipo B

EJERCICIO 2

Sea la función definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^3 - 4x^2 & \text{si} \quad 0 < x \le 4 \\ 1 - \dfrac{4}{x} & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$

a) (1'75 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) (0'75 puntos) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x = 2.

Solución

(a)
La función $x^2/2$ es una función polinómica luego es continua y derivable en todo R, en particular en x < 0.
La función $x^3-x^2/2$ es una función polinómica luego es continua y derivable en todo R, en particular en 0<x<4.
La función 1-4/x es una función racional luego es continua y derivable en todo R- {0} (númeors que anulan el denominador), en particular es continua y derivable en x > 0.
Falta estudiar la continuidad y derivabilidad en x = 0 y x = 4
f(x) es continua en x = 0 si $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$f(0) = (0)^2/2 = 0$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^2}{2} = (0)^2/2 = 0$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^3 - 4x^3) = (0)^3 - 4(0)^2 = 0$. Como los tres valores son iguales la función f(x) es continua en x = 0.
f(x) es continua en x = 4 si $f(4) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$
$f(4) = (4)^3 - 4(4)^2 = 0$; $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (x^3 - 4x^3) = (4)^3 - 4(4)^2 = 0$; $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (1-4/x) = (1-4/4) = 0$. Como los tres valores son iguales la función f(x) es continua en x = 4.
Luego f(x) es continua en R

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^3 - 4x^2 & \text{si} \quad 0 < x \le 4 \\ 1 - \dfrac{4}{x} & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}; \qquad f'(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x^2 - 8x & \text{si} \quad 0 < x < 4 \\ \dfrac{4}{x^2} & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

f(x) es derivable en x = 0 si $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x) = (0) = 0$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (3x^2-8x) = 3(0)^2-8(0) = 0$, como ambos valores coinciden la función es derivable en x = 0

f(x) es derivable en x = 4 si $\lim_{x\to 4^-} f'(x) = \lim_{x\to 4^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 4^-} f'(x) = \lim_{x\to 4^+} (3x^2-8x) = 3(4)^2-8(4) = 16$; $\lim_{x\to 4^+} f'(x) = \lim_{x\to 4^+} (4/x^2) = (4/(4)^2) = 0$, como ambos valores no coinciden la función no es derivable en x = 4

Luego f(x) es derivable en R-{4}

(b)

Sabemos que la ecuación de la recta tangente en x = 2 es " y – f(2) = f'(2)(x – 2) "

Para x = 2, $f(x) = x^3- 4x^2$ y $f'(x) = 3x^2- 8x$, por tanto $f(2) = (2)^3- 4(2)^2 = -8$ y $f'(2) = 3(2)^2- 8(2) = -4$.

La recta tangente en x = 2 es y – f(2) = f'(2)(x – 2) ", es decir y–(-8)=-4(x-2)", luego queda y = -4x.

EJERCICIO 3

El 41% de quienes se presentan a un examen son varones. Aprueban dicho examen el 70% de los varones presentados y el 60% de las mujeres presentadas.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que si una persona escogida al azar ha aprobado, sea mujer.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que si una persona escogida al azar ha suspendido, sea mujer.

c) (0'5 puntos) Ana dice que si alguien ha aprobado, es más probable que sea mujer que varón; Benito dice que si alguien ha suspendido es más probable que sea mujer que varón. ¿Quién tiene razón?

Solución

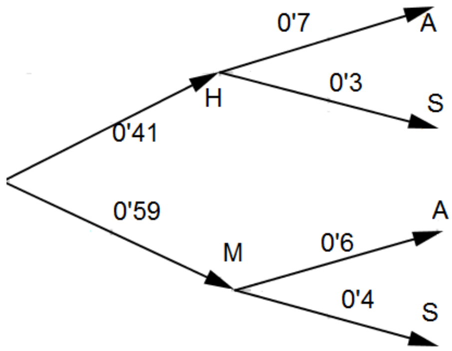
Llamemos H, H^C = M, A y S = S^C a los sucesos, "varón que se examina", " mujer que se examina ", "aprobar el examen " y "suspender el examen", respectivamente.

El 41% de quienes se presentan a un examen son varones, luego p(H) = 0'41, y entonces p(M) = 0'59 ya que son sucesos contrarios, y sabemos que la suma de las ramas de un nodo tiene que ser 1.

Aprueban dicho examen el 70% de los varones presentados, es decir p(A/H) = 0'7, y $p(A^C/H)$ = 0'3, ya que son sucesos contrarios, y sabemos que la suma de las ramas de un nodo tiene que ser 1.

Aprueban dicho examen el 60% de las mujeres presentadas, es decir p(A/M) = 0'6, y $p(A^C/M)$ = 0'4, ya que son sucesos contrarios, y sabemos que la suma de las ramas de un nodo tiene que ser 1.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol.



a)

Calcule la probabilidad de que si una persona escogida al azar ha aprobado, sea mujer. Me piden p(M/A)

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de aprobar (A) es:

p(A) = p(H).p(A/H) + p(M).p(A/M) = 0'41.0'7 + 0'59.0'6 = 0'641.

Por la fórmula de la probabilidad del suceso contrario, la probabilidad de suspender es

$P(S) = p(A^C)$ = 1- p(A) = 1 – 0'641 = 0'359.

Por la definición de probabilidad condicionada y la Fórmula de Bayes

$$p(M/A) = \frac{p(M\cap A)}{p(A)} = \frac{p(M).p(A/M)}{p(A)} = \frac{0'59.0'6}{0'641} = 0'354/0'641 \approx 0'523$$

b)

Calcule la probabilidad de que si una persona escogida al azar ha suspendido, sea mujer. Me piden p(M/S)

Teniendo en cuenta el aparatado (a) y de nuevo la definición de probabilidad condicionada tenemos

$$p(M/S) = \frac{p(M\cap S)}{p(S)} = \frac{p(M).p(S/M)}{p(S)} = \frac{0'59.0'4}{0'359} = 0'236/0'359 \approx 0'6574$$

c) (0'5 puntos) Ana dice que si alguien ha aprobado, es más probable que sea mujer que varón; Benito dice que si alguien ha suspendido es más probable que sea mujer que varón. ¿Quién tiene razón?. Me están pidiendo que compare p(M/A) con p(V(/A), y también p(M/S) con p(H/S)

Teniendo en cuenta los apartados (a), (b) y la probabilidad del suceso contrario tenemos:

$p(M/A) \approx 0'523$ y $p(V/A) = 1 - p(M/A) \approx 1 - 0'523 \approx 0'577$, luego Ana lleva razón.

Teniendo en cuenta los apartados (a), (b) y la probabilidad del suceso contrario tenemos:

$p(M/S) \approx 0'6574$ y $p(V/S) = 1 - p(M/S) \approx 1 - 0'6574 \approx 0'3426$, luego Benito lleva razón.

EJERCICIO 4

Se desea estimar la proporción de votantes a un determinado partido político mediante una muestra aleatoria.

a) (1'25 puntos) Si de una muestra de 500 personas 200 dicen que lo votan, calcule con un nivel de confianza del 97% un intervalo para la proporción de votantes a ese partido en la población.

b) (1'25 puntos) Si la proporción de votantes en otra muestra ha sido 0'2 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0'05, con un nivel de confianza del 99%, calcule el tamaño mínimo de dicha muestra.

Solución

a)

Si de una muestra de 500 personas 200 dicen que lo votan, calcule con un nivel de confianza del 97% un intervalo para la proporción de votantes a ese partido en la población.

Sabemos que *si n* ≥ 30 para la proporción muestral **p** el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ que es *la distribución muestral de proporciones*, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y generalmente escribimos $\mathbf{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ o $\mathbf{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$.

Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:

$$I.C=\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$

En nuestro caso $\hat{p} = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$, $\hat{q} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, n = 500, *nivel de confianza 1 – α* = 97% = 0'97, de donde α = 0'03 = 7% como *nivel de significación*.

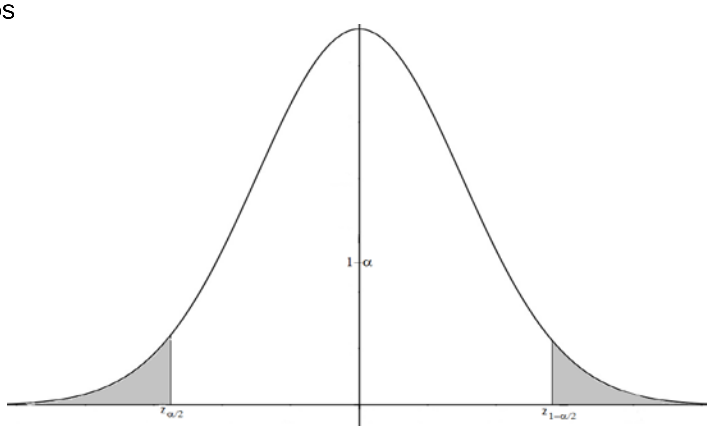
De α = 0'03 tenemos α/2 = 0'015

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'985 viene en la tabla y que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'17$. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.=I_{100(1-\alpha)\%}(\mathbf{p})=\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(\frac{2}{5} - 2'17\cdot\sqrt{\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}}{500}}, \frac{2}{5} + 2'17\cdot\sqrt{\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}}{500}}\right) \cong$$

$\cong$ (0'4 – 0'04754 ; 0'4 + 0'04754) = (0'35246; 0'44754)

Gráficamente tendríamos



b)
Si la proporción de votantes en otra muestra ha sido 0'2 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0'05, con un nivel de confianza del 99%, calcule el tamaño mínimo de dicha muestra.

Sabemos que el error máximo es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$. Despejando "n" tenemos n = $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

En nuestro caso $\hat{p}$ = 0'2, $\hat{q}$ = 1 -0'2 = 0'8, E < 0'05; *1 – α* = 99% = 0'99, de donde α = 0'01 = 1% como *nivel de significación*.
De α = 0'01 tenemos α/2 = 0'005

De la igualdad p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'005 = 0'995, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'995 no viene en la tabla, los más próximos son 0'9949 y 0'9951. Elegimos 0'9951 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'58. Por tanto

$$n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'58)^2.0'2.0'8}{(0'05)^2} = 426'009, \text{ de donde } n = 427$$

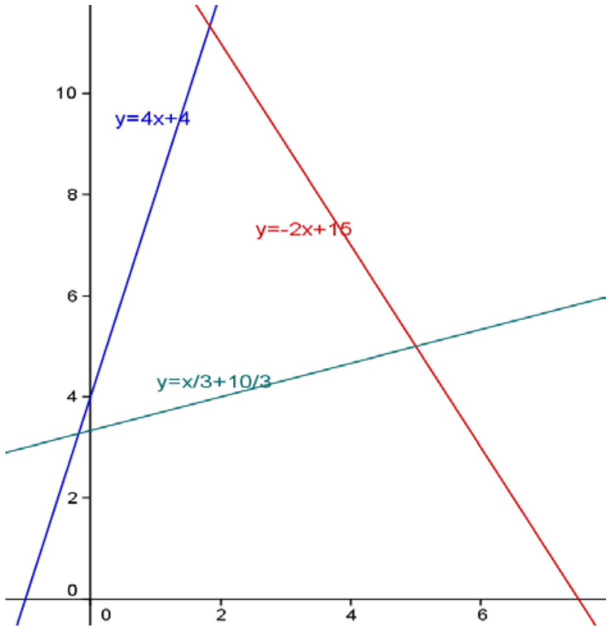
OPCIÓN B

EJERCICIO 1
Se considera el recinto del plano determinado por los siguientes semiplanos:
$$4x – y \geq 4;\quad 2x + y \leq 15;\quad 3y – x \leq 10;\quad y \geq 0.$$
a) (1'5 puntos) Represente el recinto y calcule sus vértices.
b) (0'5 puntos) Calcule los puntos del recinto donde la función F(x,y) = 4x - 7y alcanza el máximo y el mínimo.
c) (0'5 puntos) ¿Entre qué valores varía la función F(x,y) = 4x - 7y en el recinto?

Solución

(a)
Represente el recinto y calcule sus vértices.
Primero quitamos las desigualdades y nos quedan rectas
$$4x-y = 4;\quad 2x +y = 15 ;\ 3y-x = 10;\ y = 0,$$
Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente) despejamos las "y" y tenemos
$$y = 4x +4;\quad y = -2x + 15;\ y = x/3+10/3;\quad y = 0;\ x = 0,$$

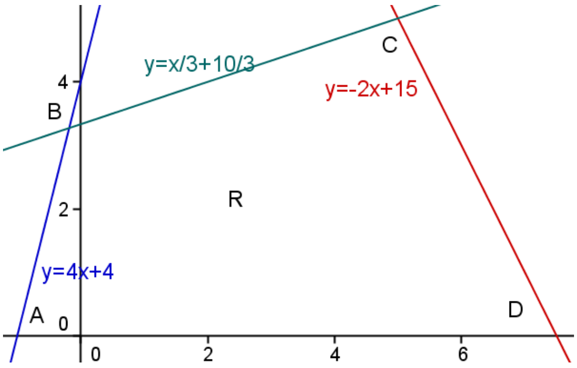
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas. (Recordamos que la recta y=0, es el eje OX).



Si nos fijamos en las desigualdades

y≤4x+4; y≤-2x+15; y≤x/3+10/3

Vemos que el recinto o región factible es el recinto cerrado convexo indicado con la letra "R" siguiente:



Vamos a calcular los vértices

De y=0 e y=4x+4, tenemos 0 = 4x+4, de donde x = -1, y el punto de corte es A(-1,0)
De y=4x+4 e y=x/3+10/3, tenemos 4x+4 = x/3+10/3, de donde 12x+12 = x+10 luego 11x = -2, es decir x = -2/11, por tanto y = 4(-2/11) +4 = 36/11 obtenemos el punto B(-2/11,36/11)
De y=-2x+15 e y=x/3+10/3, tenemos -2x+15 = x/3+10/3, de donde -6x+30 = x+10 luego 7x = 20, es decir x = 20/7, por tanto y = -2(20/7) + 15 = 65/7 obtenemos el punto C(20/7,65/7)
De y=0 e y=-2x+15, tenemos 0 = -2x+15, de donde x = 15/2, y el punto de corte es D(15/2, 0)

Los vértices de la región son A(-1, 0), B(-2/11, 36/11), C(20/7, 65/7) y D(15/2, 0).
(b)
Calcule los puntos del recinto donde la función F(x,y) = 4x - 7y alcanza el máximo y el mínimo.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

F(-1,0) = 4(-1) – 7(0) = - 4, F(-2/11, 36/11) = 4(-2/11) – 7(36/11) = -260/11 ≈ -23'6363 ,
F(20/7, 65/7) = 4(20/7) – 7(65/7) = -375/7 ≈ -53'5714, F(15/2, 0)= 4(15/2) – 7(0) =30.

El máximo absoluto es 30 y lo alcanza en el punto D(15/2, 0).
El mínimo absoluto es -375/7 y lo alcanza en el punto C(20/7, 65/7).
(c)
¿Entre qué valores varía la función F(x,y) = 4x - 7y en el recinto?
Teniendo en cuenta el apartado (b) la función F(x,y) varía entre -375/7 y 30.

EJERCICIO 2

Un depósito lleno de agua se vacía por un sumidero que tiene en la parte baja. El volumen de agua, en m^3, que hay en cada momento en el depósito, desde que empieza a vaciarse, viene dado por la función $V(t) = 8 - t + t^2/32$, donde t es el tiempo en minutos.
a) (0'5 puntos) ¿Cuál es la capacidad del depósito?
b) (0'5 puntos) ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse?
c) (0'8 puntos) Represente gráficamente la función V.
d) (0'7 puntos) Calcule la derivada de esa función en t = 8 e interprete su significado.

Solución

(a)
El volumen de agua, en m^3, que hay en cada momento en el depósito, desde que empieza a vaciarse , viene dado por la función $V(t) = 8 - t + t^2/32$, donde t es el tiempo en minutos.

¿Cuál es la capacidad del depósito?

Como nos están pidiendo el volumen máximo esto nos quiere decir que el depósito todavía no ha empezado a vaciarse, por tanto t = 0, y tenemos V(0) = 8 m^3.
(b)
¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse?

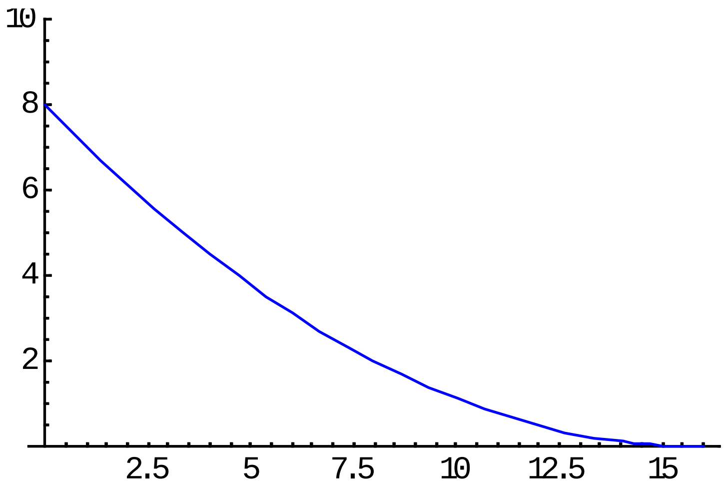
Nos están pidiendo el valor que resolvamos la ecuación V(t) = 0, es decir $8 - t + t^2/32 = 0$, o lo que es lo mismo $t^2 - 32t + 256 = 0$

$t = \dfrac{-(-32)\pm\sqrt{(-32)^2-4(1)(256)}}{2(3)} = \dfrac{32\pm\sqrt{0}}{2}$ = 16 (doble), es decir el depósito se vacía en 16 minutos.

(c)
Represente gráficamente la función V.

Nos piden dibujar la función $V(t) = 8 - t + t^2/32$ (a = 1/32, b = -1, c = 8) entre 0 y 16.
Sabemos que la gráfica es una parábola, y como a = 1/32 > 0, las parábola tiene las ramas hacia arriba ($\cup$).
Su vértice tiene la abscisa en t = -b/2a = -(-1)/(2/32) = 16, que sabemos es un mínimo.
El vértice es **V**(16,V(16)) = **V**(16,0).
$V(16) = 8 - 16 + (16)^2/32 = 0$
Para t = 0, V(0) = 8.

La gráfica de la parábola entre 0 y 16 es:



(d)
Calcule la derivada de esa función en t = 8 e interprete su significado.
La derivada de $V(t) = 8 - t + t^2/32$ es V'(t) = - 1 + t/16. Como nos piden V'(8) tenemos V'(8)=-1+8/16=-1/2.
Sabemos que la derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente a la fución en dicho punto, luego V'(8)=-1/2 es la pendiente de la recta tangente a V(t) en t = 8

EJERCICIO 3
Una persona lanza dos veces consecutivas un dado equilibrado, con las caras numeradas del 1 al 6.
a) (0'5 puntos) Determine el número de resultados del espacio muestral de este experimento aleatorio.
b) (1'5 puntos) Sea A el suceso "la mayor de las puntuaciones obtenidas es menor que 4" y B el suceso "la primera puntuación es impar". Halle la probabilidad de A y la de B.
c) (0'5 puntos) ¿Son independientes A y B?

Solución

(a)
Determine el número de resultados del espacio muestral de este experimento aleatorio.

El número de resultados del espacio muestral es 6x6 =36 (6 de cada dado)
(b)
Sea A el suceso "la mayor de las puntuaciones obtenidas es menor que 4" y B el suceso "la primera puntuación es impar". Halle la probabilidad de A y la de B.

A = "la mayor de las puntuaciones obtenidas es menor que 4" = { 1-1,1-2, 2-1, 1-3, 3-1, 2-2, 2-3, 3-2, 3-3}, donde el primer número es el resultado del primer dado y el segundo el resultado del segundo dado. Vemos que hay 9 resultados posibles

Para calcular la probabilidad utilizaremos la fórmula de Laplace.
p(A) = (nº de casos favorables)/(nº de casos posibles) = 9/36 = 1/4 = 0'25.

B = "la primera puntuación es impar" =

= { 1-1,1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 3-1,3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 5-1,5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6}. Vemos que hay 18 resultados posibles

Para calcular la probabilidad utilizaremos la fórmula de Laplace.
p(B) = (nº de casos favorables)/(nº de casos posibles) = 18/36 = 1/2 = 0'5
(c)
¿Son independientes A y B?

A y B son independientes si p(A∩B) = p(A).p(B)
A∩B es el suceso "la mayor de las puntuaciones obtenidas es menor que 4 y a la vez la primera puntuación es impar"
A = { 1-1,1-2, 2-1, 1-3, 3-1, 2-2, 2-3, 3-2, 3-3},
B = { 1-1,1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 3-1,3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6, 5-1,5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6}.

Luego A∩B = {1-1, 1-2, 1-3, 3-1, 3-2, 3-3}, es decir hay 6 sucesos y p(A∩B) = 6/36 = 1/6
Como p(A).p(B) = (1/4)(1/2) = 1/8 que es distinto de 1/6 = p(A∩B), los sucesos A y B no son independientes.

EJERCICIO 4

Se sabe que el tiempo de reacción a un determinado estímulo se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0'2 segundos.
a) (1'25 puntos) Observada una muestra aleatoria de tamaño 25 se ha obtenido una medía muestral de 0'3 segundos. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 94%.
b) (1'25 puntos) A un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral mínimo si el error cometido es inferior a 0'05?

Solución

Sabemos que si tenemos una población con distribución normal $N(\mu,\sigma)$ y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

También sabemos que cuando la población no sigue una distribución normal, podemos aplicar el teorema central del límite que dice:
Si se toman muestras de tamaño n > 30 de una población, con una distribución cualquiera, media μ *y una desviación típica* σ*, la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *se aproxima a una distribución normal* $N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$*.*

Sabemos que un *parámetro* es un valor numérico que describe una característica de la población ($\boldsymbol{\mu}$, **p**, $\boldsymbol{\sigma^2}$, etc. Es decir la media, la proporción, la varianza, ….).

Sabemos que para la media poblacional **μ** el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C=\left(\overline{x}-z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$

También sabemos que el *error máximo* de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media.

De esta fórmula despejando "n" (tamaño de la muestra) tenemos $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$.

(a)
Observada una muestra aleatoria de tamaño 25 se ha obtenido una medía muestral de 0'3 segundos. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 94%.

En nuestro caso de los datos del problema tenemos que X → N(μ,0'2); n = 25; $\overline{X}$ = 0'3, nivel de confianza 1 – α = 94% = 0'94.

Como α = 1- 0'94 = 0'06, tenemos α/2 = 0'06/2 = 0'03
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'03 = 0'97. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'97 no viene en la tabla y que el valor más próximo es 0'9699 que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = z_{0'9699}$ = 1'88, por tanto el intervalo de confianza pedido para μ es

$$\text{I.C}=\left(\overline{x}-z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(0'3-1'88\cdot\frac{0'2}{\sqrt{25}},0'3+1'88\cdot\frac{0'2}{\sqrt{25}}\right)= (0'2248,\ 0'3752)$$

(b)
A un nivel de confianza del 90%, ¿cuál será el tamaño muestral mínimo si el error cometido es inferior a 0'05?

Tenemos E < 0'05.
Como el nivel de confianza es 1 – α = 90% = 0'90, tenemos α = 1- 0'90 = 0'1, de donde α/2 = 0'1/2 = 0'05.
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'05 = 0'95. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'95 no viene en la tabla y que los valores más próximos son 0'9495 y 0'9505. Tomo 0'9505 que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = z_{0'9595}$ = 1'65, por tanto

En nuestro caso $n > \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'65.0'2}{0'05}\right)^2$ = 43'56, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n = 44.