MATEMÁTICAS CCSS JUNIO 2010 (COMÚN MODELO5) SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea el recinto definido por las inecuaciones siguientes:

$$x + y \le 15; \quad x \le 2y; \quad 0 \le y \le 6; \quad x \ge 0$$

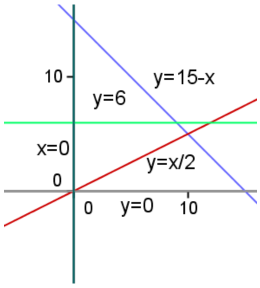
a) (1 punto) Represente gráficamente: dicho recinto.
b) (1 punto) Calcule sus vértices.
c) (0.5 puntos) Determine el máximo valor de la función F(x,y) = 8x + 5 y en el recinto anterior y dónde se alcanza.

Solución

(a)
Primeramente, transformamos las desigualdades en igualdades, y ya son rectas,

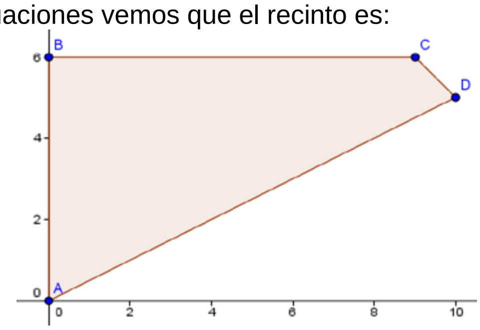
$$x+y = 15;\; x = 2y \;;\; y = 0;\; y = 6;\; x = 0,$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



(b)
Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De y=6 e y=15-x, Tenemos 6 = 15-x, de donde x = 0 e y = 6, y el punto de corte es C(9,6)
De y=6 y x=0, obtenemos el punto B(0,6)
De y=x/2 e y=15-x, Tenemos x/2 = 15-x, de donde x = 30 -2x, luego 3x = 30 y “x = 10” e “y = 5”, y el punto de corte es D(10,5)
De y=x/2 y x=0, Tenemos 0 = x/2, de donde “x = 2.0 = 0” e “y = 0”, y el punto de corte es A(0,0)
Fijándonos de nuevo en las inecuaciones vemos que el recinto es:



Los vértices de la región son A(0,0), B(0,6), C(9,6) y D(10,5).
(c)
Consideremos la función F(x,y) = 8x + 5y.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza máximo (y mínimo) absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

F(0,0) = 8.0+5.0=0, F(0,6)=8.0+5.6=30, F(9,6) = 8.9+5.6=102, F(10,5)=8.10+5.5=105.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el máximo absoluto de la función F en la región es 105 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el punto (10, 5).

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = 2x^2 – (1/3)x^3$. Calcule:
a) (1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Las coordenadas de sus extremos relativos.
c) (0’5 puntos) El punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica es 4.

Solución

(a) y (b)
Dado que la función f(x) es una función polinómica, sabemos que es continua y derivable en todo R.
Calculamos su primera derivada.
$f(x) = 2x^2 - (1/3)x^3$.
$f'(x) = 4x - x^2$.
Sabemos que los extremos relativos anulan la primera derivada
De $f'(x) = 4x - x^2 = 0$, tenemos $4x - x^2 = x(4 - x) = 0$, de donde x = 0 y x = 4 (sabemos que si el producto de dos números es cero, uno por lo menos es 0), que serán los posibles extremos.

(Entramos con un valor cualquiera a izquierda y derecha de dichas soluciones en f'(x) para ver su signo, el cual nos determinará el crecimiento o decrecimiento de f(x))

Como $f'(-1) = 4(-1) - (-1)^2 = -5 < 0$, f(x) es estrictamente decreciente en $(-\infty,0)$
Como $f'(1) = 4(1) - (1)^2 = 3 > 0$, f(x) es estrictamente creciente en (0,4)
Como $f'(5) = 4(5) - (5)^2 = -5 < 0$, f(x) es estrictamente decreciente en $(4,+\infty)$

Por definición en x = 0, f(x) tiene un mínimo relativo y vale $f(0) = 2(0)^2 - (1/3)(0)^3 = 0$.
Por definición en x = 4, f(x) tiene un máximo relativo y vale $f(4) = 2(4)^2 - (1/3)(4)^3 = 32/3$.
(c)
Sabemos que la pendiente de la recta tangente a la grafica de una función en un punto (en el que es derivable) es f'(a). Por tanto lo que tenemos que hacer es igualar la primera derivada a 4.

$f'(x) = 4x - x^2 = 4$, de donde $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Resolviendo la ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$, obtenemos $x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{4\pm\sqrt{0}}{2} = 2$ (doble), por tanto el punto de la gráfica que nos piden es (2,f(2)) = (2,16/3), puesto que $f(2)= 2(2)^2 - (1/3)(2)^3 = 16/3$

EJERCICIO 3

Un alumno va a la Facultad en autobús el 80% de los días y el resto en su coche. Cuando va en autobús llega tarde el 20% de las veces y cuando va en coche llega a tiempo sólo el 10% de las veces. Elegido un día cualquiera al azar, determine:
a) (0'75 puntos) La probabilidad de que llegue a tiempo a clase y haya ido en autobús.
b) (0'75 puntos) La probabilidad de que llegue tarde a clase.
c) (1 punto) Si ha llegado a tiempo a clase, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido en autobús?

Solución

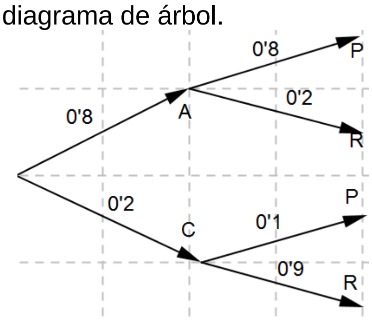
Llamemos A, A^C = C, P y R = P^C a los sucesos "elegido un día al azar, "este va en autobús", "va en coche", "llega puntual a clase" y "llega con retraso a clase", respectivamente.

Como el alumno va en autobús el 80 % de los días, p(A) = 0'8, y entonces p(C) = 0'2 ya que el resto de los días va en coche, y sabemos que la suma de las ramas de un nodo tiene que ser 1.

Si va en autobús, llega tarde el 20 % de las veces, lo que significa que p(R/A) = 0'2, y así llega puntual el 80% de las ocasiones en que va en autobús, es decir, p(P/A) = 0'8.

Finalmente, si va en coche, llega puntual el 10 % de las veces, es decir, p(P/C) = 0'1, lo que implica que llega con retraso en un 90% de las restantes veces, o sea, p(R/C) = 0'9.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol.



(a)
Aplicando el teorema de la probabilidad compuesta, la probabilidad de que haya ido en autobús(A) y llegue a tiempo a clase(P) es:

$$p(A\cap P) = p(A).p(P/A) = 0'8.0'8 = 0'64$$

(b)

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que llegue tarde a clase (R) es:

$$p(R) = p(A).p(R/A) + p(C).p(R/C) = 0'8.0'2 + 0'2.0'9 = 0'34.$$

(c)

Aplicando el teorema de Bayes, si ha llegado a tiempo a clase($P=R^C$), la probabilidad de que no haya ido en autobús (o sea, haya ido en coche) es:

$$p(A^C/P) = \frac{p\left(A^C\cap P\right)}{p(P)} = \frac{p\left(C\cap P\right)}{p(P)} = \frac{p\left(C\right).p(P/C)}{p(P)} = \frac{0'2.0'1}{0'66} = 1/33 \cong 0'03$$

Hemos utilizado que $p(P) = p(R^C) = 1 - p(R) = 1 - 0'34 = 0'66$

EJERCICIO 4

Una empresa consultora quiere estudiar algunos aspectos de la vida laboral de los trabajadores de una ciudad. Para ello selecciona una muestra aleatoria de 500 trabajadores, de los que 118 afirman residir en otra ciudad. Con un nivel de confianza del 93%,

a) (1'75 puntos) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de trabajadores que residen fuera.

b) (0'75 puntos) Calcule el error cometido en el intervalo anterior.

Solución

a)

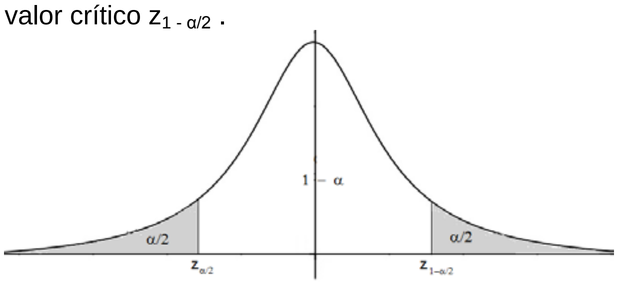
Para construir el intervalo:

- Se elige un *estimador* del parámetro que se desea estimar ($\overline{X}$ para **μ**, y $\hat{p}$ para **p**), en nuestro caso es de proporción luego es $\hat{p} = \frac{118}{500} = \frac{59}{250}$.
- Se elige *un nivel de confianza 1 – α* con el que se desea construir el intervalo, que nos lo dan y es del 93%, es decir 1 – α = 93% = 0'93, de donde α = 0'07 = 7% como *nivel de significación*.
- El intervalo centrado en el estadístico $\hat{p}$ obtenido en la muestra que sería:

$$\text{I.C.} = I_{100(1-\alpha)\%}(\,\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) \text{ para estimar } \mathbf{p}$$

Donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ tal que $p(-z_{1-\alpha/2} \le Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$.

De esa igualdad se deduce que $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$, que se mira en la tabla de la distribución Normal, y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$.



$p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'07/2 = 0'965$, mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor más próximo a 0'965 es 0.9656, que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 1'82$. Por tanto el intervalo de confianza pedido es

$$\text{I.C.}=I_{100(1-\alpha)\%}(\mathbf{p})=\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(\frac{59}{250} - 1'82.\sqrt{\frac{\frac{59}{250}.\frac{191}{250}}{500}}, \frac{59}{250} + 1'82.\sqrt{\frac{\frac{59}{250}.\frac{191}{250}}{500}}\right) \cong$$

$\cong$ (0'236 – 0'03456 ; 0'236 – 0'03456) = (0'20144; 0'27056)

b)

Sabemos que el error máximo = E = $z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, en nuestro caso:

$$E = z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1'82.\sqrt{\frac{\frac{59}{250}.\frac{191}{250}}{500}} \cong 0'03456 = 3'456\%$$

OPCION B

EJERCICIO 1

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule $A^t.B – A. B^t$.

b) (1’5 puntos) Resuelva la ecuación matricial AX + BA = B.

Solución

(a)

Dadas A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, sus traspuestas son $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^t.B – A. B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

Resuelva la ecuación matricial AX + BA = B.

De AX + BA = B tenemos AX = B – BA = B(I_2 – A). Si A tiene inversa podríamos multiplicar por la izquierda por A^{-1} y nos quedaría $A^{-1}.AX = A^{-1}.B(I_2 – A)$, es decir $X = A^{-1}.B(I_2 – A)$.

A tiene inversa si mediante transformaciones elementales por filas de Gauss podemos llegar de ($A|I_2$), a la expresión ($I_2|B$), donde $B = A^{-1}$.

$$(I_2|A) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_2-F_1} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)^{F_1-2.F_2} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)^{\text{Cambio}}_{F_1 \text{ por } F_2} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

La matriz inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1}.B(I_2 – A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -23 & -5 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) (0’8 puntos) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{1+x^2}$

b) (0’8 puntos) $g(x) = \ln(x(1 + 3x^2))$

c) (0’9 puntos) $h(x) = 2^{5x} + \dfrac{1}{x^2}$

Solución

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación

$(f(x)+g(x))’ = f’(x)+g’(x)$; $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$; $(\ln(f(x))’ = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$;

$(a^{f(x)})’ = f’(x). a^{f(x)}.\ln(a)$; $(e^{kx})’ = k.e^{kx}$.; $(k)’ = 0$.

a)

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{1+x^2}; \qquad f’(x) = \frac{3.e^{3x}.(1+x^2) - e^{3x}.(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{e^{3x}.(3x^2-2x+3)}{(1+x^2)^2}.$$

b)

$$g(x) = \ln(x(1 + 3x^2)) = \ln(3x^3 + x); \qquad g’(x) = \frac{9x^2+1}{3x^3+x};$$

c)

$$h(x) = 2^{5x} + \frac{1}{x^2}; \qquad h’(x) = 5.2^{5x}.\ln(2) + \frac{0 - 1.2x}{(x^2)^2} = 5.2^{5x}.\ln(2) + \frac{-2x}{x^4} = 5.2^{5x}.\ln(2) - \frac{2}{x^3}$$

EJERCICIO 3

De las 180 personas que asisten a un congreso médico, 100 son mujeres. Observando las especialidades de los congresistas, vemos que de las 60 personas que son pediatras 20 son mujeres. Se elige al azar una persona asistente al congreso.

a) (0’75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y pediatra?

b) (0’75 puntas) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea hombre ni sea pediatra?

c) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea pediatra?

Solución

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una tabla de contingencia (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	Mujeres	Hombres	Totales
Pediatras	20		60
No pediatras			
Totales	100		180

Completamos la tabla de contingencia sabiensdo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Mujeres	Hombres	Totales
Pediatras	20	**40**	60
No pediatras	**80**	**40**	**120**
Totales	100	**80**	180

(a)

p("mujer y pediatra")= $\frac{\text{Número total de mujeres pediatras}}{\text{Número total de asistentes}} = \frac{20}{180} \cong$0'1111

(b)

p("no sea hombre y no sea pediatra")=p("mujer y no pediatra")= $\frac{\text{Total de mujeres no pediatras}}{\text{Total de asistentes}} = \frac{80}{180} \cong$0'444

(c)

p("pediatra")= $\frac{\text{Total de pediatras}}{\text{Total de asistentes}} = \frac{60}{180} \cong$0'333

EJERCICIO 4

Un agricultor piensa que la producción media por naranjo, en su finca, es de 88 kg o más. Para confirmar su creencia selecciona, al azar, 10 de sus naranjos, pesa su producción y obtiene como resultado, en kg, para cada uno de ellos:

95 , 86 , 92 , 85 , 83 , 84 , 95, 80 , 83 , 87 ,

Se acepta que la producción de un naranjo sigue una distribución Normal con desviación típica 5 kg.

a) (1'5 puntos) Plantee el contraste de hipótesis unilateral que responda a las condiciones del problema y determine la región crítica para un nivel de significación α = 0.05

b) (1 punto) Con los datos de esta muestra, ¿qué conclusión debe obtener el agricultor sobre la producción media por naranjo de su finca, utilizando ese mismo nivel de significación?

Solución

(a) y (b)

La suposición del agricultor es que la producción media por naranjo, en su finca, es de 88 kg o más, por tanto hipótesis nula que se desea contrastar es $H_0 : \mu \geq 88$, frente a la hipótesis alternativa de este contraste que sería $H_1 : \mu < 88$, que se opone a lo que afirma el agricultor.

El *estadístico de prueba* de este contraste es $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1).

En nuestro caso: $\overline{X} = \frac{95+86+92+85+83+84+95+80+83+87}{10}$ =87kg; μ_0=88kg; desviación típica σ=5kg; n=10.

Calculo de la región crítica para el nivel de significación α = 0'05

El valor critico correspondientees $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$

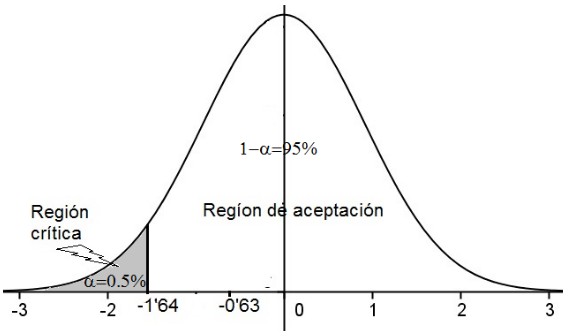
Sabemos que $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0.05 =$ 0'95, que se mira en la tabla de la distribución Normal, y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha}$. Vemos en la tabla de la N(0,1) que el valor más próximo a 0'95 es 0.9495 o 0.9505. Como vemos está en la mitad, no obstante elegimos 0.9495, que corresponde a $z_{1-\alpha}$= 1'64. Por tanto $z_\alpha = - z_{1-\alpha} = - z_{0'95} \cong$ -1'64.

Entonces la región crítica o de rechazo está formada por los números reales situados a la izquierda de los números -1'64.

Cálculo del valor observado del estadístico de contraste:

$$z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{87-88}{5/\sqrt{10}} \cong -0'63$$

Resultado del contraste:



Como el valor observado -0'63 está a la derecha de -1'64 porque -1'64 < -0'63, se encuentra en la región de aceptación correspondiente al nivel 0'05, por lo cual *se acepta la hipótesis nula* $H_0 : \mu \geq 88$ a este nivel.

En consecuencia, se acepta la hipótesis nula H_0 y la producción media por naranjo, en su finca, es mayor de 88 kg o más, al nivel de significación 0'05, pudiendo haber cometido un error del tipo II.