PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD SEPTIEMBRE 2010-2011 ANDALUCÍA
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
a) Duración:1 hora y 30 minutos.
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se considera el recinto R del plano, determinado por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \geq 2;\ \ x + 3y \leq 15;\ \ 3x - y \leq 15;\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0.$$

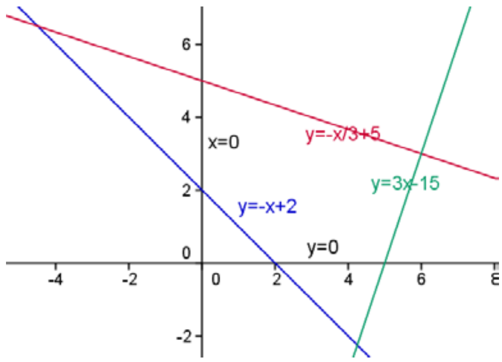
(a) (1'5 puntos) Represente gráficamente el recinto R y calcule sus vértices.
(b) (0'5 puntos) Halle los valores máximo y mínimo que alcanza la función $F(x,y) = 3x + y$ en dicho recinto.
(c) (0'5 puntos) Razone si existen puntos (x,y) del recinto, para los que $F(x,y) = 30$.

Solución

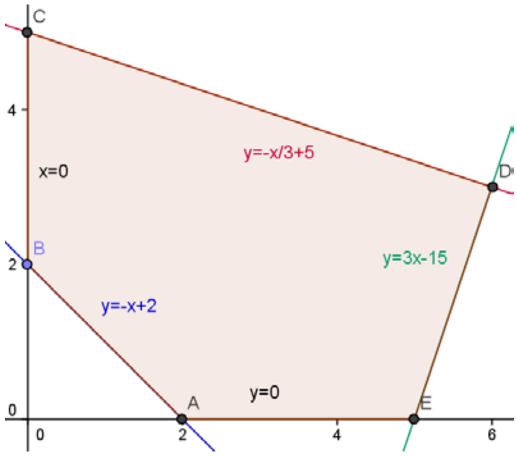
(a) y (b)
Tenemos las siguientes inecuaciones: $x + y \geq 2;\ x + 3y \leq 15;\ 3x - y \leq 15;\ x \geq 0,\ y \geq 0$.
De las desigualdades pasamos a las igualdades: $x + y = 2;\ x + 3y = 15;\ 3x - y = 15;\ x = 0,\ y = 0$.
Para dibujar la región factible o recinto, de cada inecuación despejamos la incógnita "y" para dibujar la recta correspondiente, y después observando las inecuaciones tendremos la región factible que indicaremos como la letra "Región factible".

$$y = -x+2;\ \ y = -x/3+5;\ \ y = 3x-15;\ \ x = 0,\ \ x = 0 \text{ (eje OY)},\ \ y = 0 \text{ (eje OX)}$$

Dibujamos las rectas



Si nos fijamos en las desigualdades "$y \geq -x+2;\ y \leq -x/3+5;\ y \geq 3x-15;\ x \geq 0,\ y \geq 0$", vemos que el recinto factible, y los vértices A, C, D y E de dicha región son:



De $y= -x+2$ e $y=0$, Tenemos el punto de corte A(2,0)
De $y= -x+2$ y $x = 0$, tenemos $y= 0$, y el punto de corte B(0,2)
De $y=-x/3+5$ y $x= 0$, tenemos el punto de corte C(0,5)
De $y= -x/3+5$ e $y= 3x-15$, tenemos $-x/3+5 = 3x-15$, de donde $-x+15 = 9x-45$, es decir $10x = 60$, luego $x = 6$ e $y= 3$, y el punto de corte D(6,3)
De $y= 3x-15$ e $y= 0$, tenemos $x = 5$ e $y = 0$, el punto de corte E(5,0)

El recinto tiene por vértices A(2,0), B(0,2), C(0,5), D(6,3) y E(5,0).

Consideremos la función F(x,y) = 3x + y.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto (o en un segmento, si coincide en dos vértices consecutivos), por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

F(2,0) = 3(2) + (0) = 6, F(0,2) = 3(0) + (2) = 2, F(0,5) = 3(0) + (5) = 5, F(6,3) = 3(6) + (3) = 21, F(5,0) = 3(5) + (0) = 15.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es** 21 (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el punto (6,**3**)**, y **el mínimo absoluto de F es 2** (el valor menor en los vértices) y **se alcanza en el punto (0,2)**.
(c)
Razone si existen puntos (x,y) del recinto, para los que F(x,y) = 30.

No existe ningún valor (x,y) tal que **F(x,y) = 30**, puesto que **el máximo es 21** y **el mínimo 2**.

EJERCICIO 2

(a) (1'25 puntos) Halle el dominio, los puntos de corte con los ejes, y las asíntotas de la función $f(x) = \frac{4x}{2x+1}$.
(b) (1'25 puntos) Halle los intervalos de monotonía, los extremos relativos, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de la función $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$.

Solución

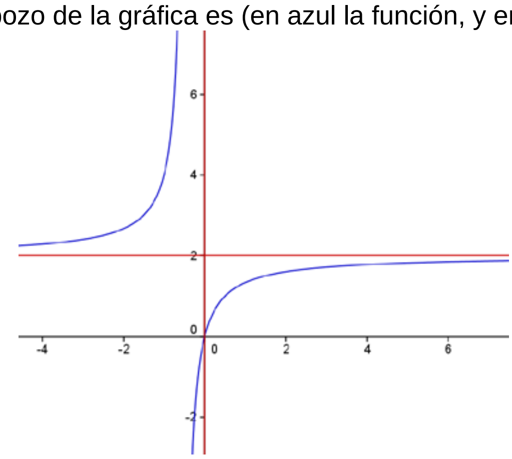
(a)
Halle el dominio, los puntos de corte con los ejes, y las asíntotas de la función $f(x) = \frac{4x}{2x+1}$.
Sabemos que el dominio de una función racional es R – {soluciones denominador = 0}
Las asíntotas verticales (A.V.) suelen ser los números que anulan el denominador, después hay que comprobar que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Las asíntotas horizontales son las rectas "y = b", con $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$.
Dom(f(x)) = R- {soluciones de 2x+1 = 0} = R – {-1/2}.
Como $\lim_{x\to -1/2^+} f(x) = \lim_{x\to -1/2^+} \frac{4x}{2x+1}$ = -2/0+ = -∞, **la recta "x = - 1/2" es una A.V**.

$$\lim_{x\to -1/2^-} f(x) = \lim_{x\to -1/2^-} \frac{4x}{2x+1} = -2/0- = +\infty.$$

Como $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x}{2x+1}$ = {términos de mayor grado} = $\lim_{x\to +\infty} \frac{4x}{2x} = \lim_{x\to +\infty} (4/2) = 2$, **la recta "y = 2" es una A.H**.
Sabemos que en los cocientes de funciones polinómicas la A.H. en +∞ y en - ∞ es la misma.

La función $f(x) = \frac{4x}{2x+1}$ es una función homográfica, y su gráfica es una hipérbola con los ejes desplazados. Dándole un valor a f(x), a izquierda y derecha del la A.V. x = - 1/2, sabemos donde está situada. En este caso en el II y IV cuadrante, de los nuevos ejes que son las asíntotas.
Como me piden los cortes con los ejes, estos valdrán:
Para x = 0, f(0) = 0. Punto (0,0), corte con el eje OY.
Para f(x) = 0, tenemos 4x = 0, de donde x = 0. Punto (0,0), corte con el eje OX.

También sabemos que la gráfica de una hipérbola nunca toca ni atraviesa las asíntotas.
Teniendo en cuenta lo anterior, un esbozo de la gráfica es (en azul la función, y en rojo las asíntotas):



(b)
Halle los intervalos de monotonía, los extremos relativos, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de la función $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$.
Estudie la monotonía de f.

Recordamos que la monotonía sale del estudio de la primera derivada.
Si f’(x) > 0, f(x) es estrictamente creciente (Se dibuja hacia arriba).
Si f’(x) < 0, f(x) es estrictamente decreciente (Se dibuja hacia abajo).

Recordamos que la curvatura sale del estudio de la segunda derivada.
Si f’’(x) > 0, f(x) es convexa ($\cup$) (en Andalucía).
Si f’’(x) < 0, f(x) es cóncava ($\cap$) (en Andalucía).

Como $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$, tenemos $g'(x) = 3x^2 + 6x + 3$ y $g''(x) = 6x + 6$.

De g’(x) = 0, tenemos $3x^2 + 6x + 3= 0$, de donde $x^2 + 2x + 1 = 0$, de donde $x = \frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2} = -1$ (doble) que será el posible extremo relativo.

Como $g'(-2) = 3(-2)^2 + 6(-2) + 3 = 9$, g(x) es estrictamente creciente en $(-\infty,-1)$.
Como $g'(0) = 3(0)^2 + 6(0) + 3 = 0$, g(x) es estrictamente creciente en $(-1,+\infty)$.
Por tanto **la función es estrictamente creciente en R y no tiene ni máximos ni mínimos relativos**.

De g’’(x) = 0, tenemos 6x + 6 = 0, de donde x = -1, que será el posible punto de inflexión.

Como g’’(-2) = 6(-12) + 6 = -6 < 0, **g(x) es cóncava ($\cap$) en $(-\infty,-1)$**.
Como g’’(0) = 6(0) + 6 = 6 > 0, **g(x) es convexa ($\cup$) en $(-1,-\infty)$**.
Por definición **x = -1 es un punto de inflexión de g(x) que vale** $g(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) =$ **-1**.

EJERCICIO 3

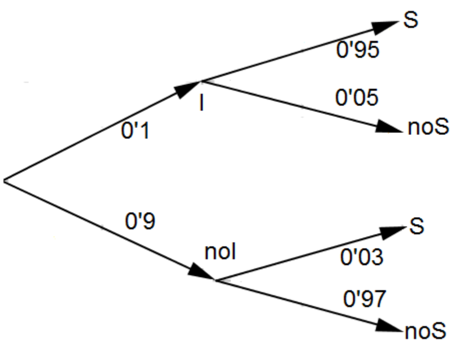
En un sistema de alarma, la probabilidad de que haya un incidente es 0’1. Si este se produce, la probabilidad de que la alarma suene es 0’95. La probabilidad de que suene la alarma sin que haya incidente es de 0’03.
(a) (1’5 puntos) ¿,Cual es la probabilidad de que suene la alarma?
(b) (1 punto) Si ha sonado la alarma, calcule la probabilidad de que no haya habido incidente.

Solución

Llamemos I, I^C = noI, S y S^C = noS a los sucesos "incidente", “no incidente”, suene la alarma” y “ no suene”.

De “la probabilidad de que haya un incidente es 0’1”, tenemos p(I) = 0’1, y por suceso contrario p(noI) = 0’9.
De “si hay incidente, la probabilidad de que la alarma suene es 0’95”, tenemos p(S/I)=0’95, y por contrario p(noS/I)= 0’05.
De “suene la alarma sin que haya incidente es de 0’03”, tenemos p(S/noI)=0’03, y por contrario p(noS/noI) = 0’93.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



(a)
¿Cual es la probabilidad de que suene la alarma?
Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que suene la alarma es:

$$p(S) = p(I).p(S/I) + p(noI).p(S/noI) = (0'1)(0'95) + (0'9)(0'03) = 0'122.$$

(b)
Si ha sonado la alarma, calcule la probabilidad de que no haya habido incidente.
Aplicando el teorema de Bayes, la probabilidad de que si ha sonado la alarma, no haya habido incidente es:

$$p(noI/S) = \frac{p(noI \cap S)}{p(S)} = \frac{p(noI).p(S/noI)}{p(S)} = \frac{0'9.0'03}{0'122} \cong 0'2213.$$

EJERCICIO 4

Suponiendo que la variable "años de vida de los individuos de un país" sigue una distribución Normal con desviación típica 8'9 años, se desea contrastar la hipótesis de que la vida media de los mismos no supera los 70 años.
A partir de una muestra aleatoria de 100 individuos se ha obtenido que su vida media ha sido 71'8 años.
(a) (0.5 puntos) Formule el contraste de hipótesis que indica el enunciado.
(b) (1 punto) Determine la región critica a un nivel de significación del 5%.
(c) (1 punto) Con los datos muestrales, ¿existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis a ese nivel de significación?

Solución

(a) , (b) y (c)

Como me dicen que se desea contrastar la hipótesis de que la vida media de los mismos no supera los 70 años, tenemos por tanto que la hipótesis nula que se desea contrastar es $H_0 : \mu_0 \le 70$, frente a la hipótesis alternativa de este contraste que sería $H_1 : \mu_0 > 70$, que se opone a hipótesis nula H_0, que me da el sentido de la región crítica. Es un contraste unilateral.

El *estadístico de prueba* de este contraste es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1).

En nuestro caso: $\overline{X}$ = 71'8 cm; μ_0 = 70 cm; desviación típica σ = 8'9 cm; n =100.

Calculo de la región crítica para el nivel de significación α = 5% =0'05

El valor critico correspondientees $z_{1-\alpha}$

Sabemos que $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'05 = 0'95$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y vemos que no está en las tablas. Los valores mas próximos son 0'9495 y 0'9505. Elegimos 0'9505 y vemos en la tabla de la N(0,1) que el valor 0'9505 corresponde a $z_{1-\alpha}$= 1'65. Por tanto **el punto crítico es $z_{1-\alpha}$ =** $z_{0'9505} \cong$ **1'65**.

Entonces *la región crítica* está formada por los números reales situados a la derecha de los números 1'65.

Cálculo del valor observado del estadístico de contraste:

$$z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{71'8-70}{8'9/\sqrt{100}} \cong 2'0225$$

Resultado del contraste:

Como *el valor observado z_0 = 2'0225 está* a la derecha de 1'65, porque 1'65 < 2'0225, por tanto se encuentra *en la región de rechazo* correspondiente al nivel 0'05. **Se rechaza *la hipótesis nula* H_0** : $\mu \le 70$ a este nivel de significación, y aceptamos la hipótesis alternativa.

En consecuencia, se puede afirmar, al nivel 0'05, que **la vida media de los mismos supera los 70 años**.

OPCION B

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
(a) (1'25 puntos) Efectúe, si es posible, los siguientes productos: $A.A^t$; $A^t.A$; A.B
(b) (1'25 puntos) Resuelva la siguiente ecuación matricial $A.A^t.X = B$.

Solución

Dadas $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de A es $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a)
Efectúe, si es posible, los siguientes productos: $A.A^t$; $A^t.A$; A.B

Sabemos que para poder multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera tiene que coincidir con el número de filas de la segunda
$A.A^t = A_{2x\mathbf{3}} .A^t_{\mathbf{3}x2}$. En este caso **se puede multiplicar** y el resultado es una matriz 2x2.

$A.A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$A^t.A = A_{3x\mathbf{2}} .A^t_{\mathbf{2}x3}$. En este caso **se puede multiplicar** y el resultado es una matriz 3x3.

$A^t.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A.B = A_{2x\mathbf{3}} .B_{\mathbf{2}x2}$. En este caso **no se puede multiplicar**.

(b)

Resuelva la siguiente ecuación matricial $A.A^t.X = B$.

Me están pidiendo que resuelva $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Como $A.A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, tiene matriz inversa $(A.A^t)^{-1}$, multiplicando por la izquierda $A.A^t.X = B$ tenemos:

$(A.A^t)^{-1}.(A.A^t).X = (A.A^t)^{-1}.B \rightarrow I_2.X = (A.A^t)^{-1}.B \rightarrow X = (A.A^t)^{-1}.B$

De $A.X + B = 2.C$ tenemos $A.X = 2.C - B$.

$A.A^t$ tiene inversa si mediante transformaciones elementales por filas de Gauss podemos llegar de $(A.A^t|I_2)$, a la expresión $(I_2|B)$, donde $B = (A.A^t)^{-1}$.

$(A.A^t|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_2 \\ F_2/2 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$

La matriz inversa es $(A.A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

También se puede calcular la inversa por determinantes.

$A.A^t$ tiene inversa si su determinante $|A.A^t|$ es distinto de 0, y la inversa es $(A.A^t)^{-1} = \frac{1}{|A.A^t|}.Adj((A.A^t))$

$|A.A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, luego existe la inversa.

$A.A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $(A.A^t)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $Adj((A.A^t)^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

De $X = (A.A^t)^{-1}.B$, tenemos $X = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+4 & \text{si } x \le 2 \\ 4 - \dfrac{a}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(a) (1'5 puntos) Halle el valor de "a" para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de f para ese valor de "a".

(b) (1 punto) Para a = 1, ¿existe alguna asíntota vertical de esa función? ¿y horizontal? Razone las respuestas y calcule, en caso afirmativo, dichas asíntotas.

Solución

(a)

Halle el valor de "a" para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+4 & \text{si } x \le 2 \\ 4 - \dfrac{a}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ para ese valor de "a".

La función "$x^2 - 3x + 4$" es una función polinómica, por tanto continua y derivable en todo R, en particular en $(-\infty,2)$.

La función $4 - a/x$ es continua y derivable en R – {0} (números que anulan el denominador), en particular en $(2,\infty)$.

Veamos la continuidad en x = 2

f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.

$f(2) = (2)^2 - 3(2) + 4 = 2$; $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 3x + 4) = (2)^2 - 3(2) + 4 = 2$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (4 - a/x) = 4 - a/2$. Como los tres valores tienen que ser iguales (para que sea continua en "2"), tenemos $2 = 4 - a/2$, de donde $4 = 8 - a$, luego $a = 4$.

Si "a = 4", $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+4 & \text{si } x \le 2 \\ 4 - \dfrac{4}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

f(x) es derivable en x = 2 si $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$f(x) = \begin{cases} x^2-3x+4 & \text{si } x \le 2 \\ 4 - \dfrac{4}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{4}{x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x-3) = 1$; $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (4/x^2) = 4/4 = 4$, como $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = 1 = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$, la función es derivable en x = 2, para a = 4. Por tanto f(x) es derivable en R, y es $f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{4}{x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

(b)
Para a = 1, ¿existe alguna asíntota vertical de esa función? ¿y horizontal? Razone las respuestas y calcule, en caso afirmativo, dichas asíntotas.

Si "a = 1", $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+4 & \text{si } x \le 2 \\ 4 - \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Recordamos que x = a (suelen ser los números que anulan el denominador) es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.
Recordamos que y = b es una asíntota horizontal de f(x) si $\lim_{x\to \infty} f(x) = b$. Sabemos que en los cocientes de funciones polinómicas la asíntota en $+\infty$ y en $-\infty$, es la misma.
Si x < 2, $f(x) = x^2 - 4x + 5$ es una función polinómica, y sabemos que dichas funciones **no tiene asíntotas**.
Si x > 2, $f(x) = 4 - 1/x$ es una función racional. Tendría una A.V. en "x=0", pero dicho punto no está en el dominio x > 2 luego **no tiene asíntotas verticales**.
Como $\lim_{x\to +\infty} (4 - 1/x) = 4 - 0 = 4$, **la recta "y = 4" es la asíntota horizontal de f(x) en $+\infty$**.

EJERCICIO 3

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$p(A) = 0'4,\ p(B) = 0'5 \text{ y } p(A\cap B) = 0'2.$$

(a) (1'5 puntos) Calcule las siguientes probabilidades: $p(A\cup B)$, $p(A/B)$ y $P(B/A^C)$.
(b) (0'5 puntos) Razone si A y B son sucesos incompatibles.
(c) (0'5 puntos) Razone si A y B son independientes.

Solución

$p(A) = 0'4$, $p(B) = 0'5$ y $p(A\cap B) = 0'2$.
(a)
Calcule las siguientes probabilidades: $p(A\cup B)$, $p(A/B)$ y $P(B/A^C)$.

$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 0'4 + 0'5 - 0'2 = 0'7$.

$p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = (0'2)/(0'5) = 0'4$.

$p(B/A^C) = \dfrac{p(B\cap A^C)}{p(A^C)} = \dfrac{p(B)-p(A\cap B)}{1-p(A)} = (0'5 - 0'2)/(1 - 0'4) = 0'5$.

(b)
Razone si A y B son sucesos incompatibles.

A y B son sucesos incompatibles si $p(A\cap B) = 0$, pero como $p(A\cap B) = 0'2$, los sucesos **no son incompatibles**.
(c)
Razone si A y B son independientes.

A y B son sucesos independientes si $p(A\cap B) = p(A).p(B)$. Como $p(A\cap B) = 0'2$ y $= p(A).p(B) = 0'4.0'5 = 0'2$, los sucesos **son independientes**.

EJERCICIO 4

Sea X una variable aleatoria Normal de media 50 y desviación típica 4. Se toman muestras de tamaño 16.
(a) (1 punto) ¿Cual es la distribución de la media muestral?
(b) (1'5 puntos) ¿Cual es la probabilidad de que la media muestral este comprendida entre 47'5 y 52'5?

Solución

(a) y (b)

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una normal N(μ, σ), la distribución muestral de medias $\overline{X}$ sigue una normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

¿Cual es la probabilidad de que la media muestral este comprendida entre 47'5 y 52'5?

Datos: X sigue una normal N(50,4), luego $\mu = 50 = \overline{x}$ y $\sigma = 4$; n = 16

Me están pidiendo $p(47'5 < \overline{X} < 52'5)$ = { tipifico $Z = \frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ } $= p(\frac{47'5-50}{4/\sqrt{16}} < Z < \frac{52'5-50}{4/\sqrt{16}}) \cong p(-2'5 < Z < 2'5) =$
$= p(Z < 2'5) - p(Z < -2'5) = p(Z < 2'5) - [1 - p(Z \le 2'5)] = 2.p(Z < 2'5) - 1 =$ {mirando en las tablas de la N(0,1) } =
$= 2.0'9938 - 1 = 0'9876$.