SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS SEPTIEMBRE 2015 MODELO 3

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

a) (0'5 puntos) Calcule A^2.
b) (1'7 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X + 4B = C^t$.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

a)
Calcule A^2.

$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

b)
Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X + 4B = C^t$.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4 \neq 0$, existe su matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$.

Multiplicando la expresión $A\cdot X + 4B = C^t$ por A^{-1} por la izquierda tenemos:
$A^{-1}\cdot A\cdot X + A^{-1}\cdot 4B = A^{-1}\cdot C^t \rightarrow I\cdot X + 4A^{-1}\cdot B = A^{-1}\cdot C^t \rightarrow X + 4A^{-1}\cdot B = A^{-1}\cdot C^t \rightarrow X = A^{-1}\cdot C^t - 4A^{-1}\cdot B \rightarrow$
$\rightarrow$ $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(C^t - 4B)}$

Calculamos la matriz inversa A^{-1}.

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, luego $\mathbf{A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t) = (1/4)\cdot}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

También se podría haber calculado por el método de Gauss
A tiene inversa si mediante transformaciones elementales por filas de Gauss podemos llegar de $(A|I_2)$, a la expresión $(I_2|B)$, donde $B = A^{-1}$.

$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_2+F_1} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)_{F_2:4} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right)^{F_1-2F_2} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right)$ por tanto
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{X = A^{-1}\cdot(C^t - 4B) =} (1/4)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 8 & 12 & -8 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix} - 4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) =$

$= (1/4)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 8 & 12 & -8 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -8 & -8 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}\right) = (1/4)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 4 & -16 \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} = (1/4)\cdot\begin{pmatrix} 8 & -16 & -24 \\ 4 & 16 & -20 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2 (A)

a) (1 punto) Determine el valor de *a* para que sea continua en x = -1 la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{x-1} & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}.$$

b) (1'5 puntos) Calcule los coeficientes *b* y *c* de la función $g(x) = x^3 + bx^2 + cx - 2$ para que (1,2) sea un punto de inflexión de *g*.

Solución

a)

Determine el valor de *a* para que sea continua en x = -1 la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{x-1} & \text{si } x \le -1 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

f(x) es continua en x = -1 si $f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$.

$f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \dfrac{ax}{x-1} = \dfrac{a(-1)}{(-1)-1} = a/2;$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^3-3x^2+6x-2) = ((-1)^3-3(-1)^2+6(-1)-2) = -1-3-6-2 = -12$, como tienen que ser iguales tenemos a/2 = -12, de donde **a = -24 para que f sea continua en x = -1.**

b)

Calcule los coeficientes *b* y *c* de la función $g(x) = x^3 + bx^2 + cx - 2$ para que (1,2) sea un punto de inflexión de *g*.

Sabemos los puntos de inflexión anulan la segunda derivada, como (1,2) es un punto de inflexión de *g*, tenemos que **g ''(1) = 0.**

Como (1,2) es un punto de *g*, tenemos que **g (1) = 2.**

$g(x) = x^3 + bx^2 + cx - 2$; $g'(x) = 3x^2 + 2bx + c$; $g''(x) = 6x + 2b$.

De g ''(1) = 0, tenemos 6(1) + 2b = 0, de donde **b = -3.**

De g(1) = 2, tenemos $(1)^3 - 3(1)^2 + c(1) - 2 = 2$, de donde **c = 6.**

EJERCICIO 3 (A)

Lucía quiere ir de vacaciones a la costa. En su guía de viajes lee que en esa época del año llueve dos días a la semana y que hace viento el 25% de los días que llueve y el 40% de los días que no llueve. Elegido un día de esa época,

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que haga viento?

b) (0'75 puntos) Si hace viento, ¿cuál es la probabilidad de que esté lloviendo?

c) (0'25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva y no haga viento?

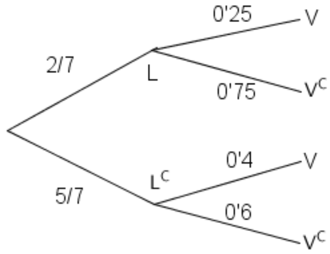
Solución

Lucía quiere ir de vacaciones a la costa. En su guía de viajes lee que en esa época del año llueve dos días a la semana y que hace viento el 25% de los días que llueve y el 40% de los días que no llueve. Elegido un día de esa época,

Llamemos L, L^C, V y V^C, a los sucesos siguientes, “llueve”, "no llueve", "hace viento" y "no hace viento", respectivamente.

Datos del problema p(L) = 2/7; p(V/L) = 25% = 0'25; p(V/L^C) = 40% = 0'4,….

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)

¿Cuál es la probabilidad de que haga viento?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que haga viento es:

p(hace viento) = p(V) = p(L).p(V/L) + p(L^C).p(V/L^C) = (2/7)·(0'25) + (5/7)·(0'4) **= 5/14 ≅ 0'357**.

b)

Si hace viento, ¿cuál es la probabilidad de que esté lloviendo?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(L/V) =} \frac{p(L \cap V)}{p(V)} = \frac{p(L).p(V/L)}{p(V)} = \frac{(2/7)\cdot(0'25)}{(5/14)} \mathbf{= (1/5) = 0'2}.$$

c)
¿Cuál es la probabilidad de que no llueva y no haga viento?

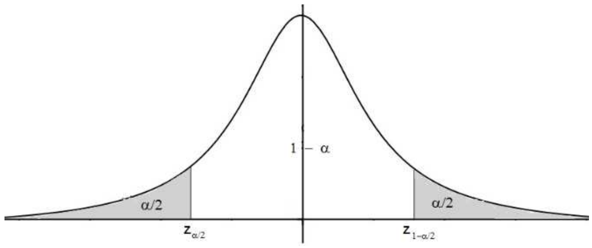
p(no llueve y no hace viento) = p($L^C \cap V^C$) = p(L^C).p(V^C/L^C) = (5/7)·(0'6) **= 3/7 ≅ 0'4286**.

EJERCICIO 4 (A)

a) (1'5 puntos) En una muestra aleatoria de 100 botellas de agua mineral se encontró un contenido medio de 48 cl. Sabiendo que la variable "contenido de agua de una botella" sigue una ley Normal con desviación típica 5 cl, determine un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 95%.
b) (1 punto) ¿Qué tamaño muestral mínimo debería considerase para estimar esta media con el mismo nivel de confianza y un error inferior a 0'5 cl?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

a)
En una muestra aleatoria de 100 botellas de agua mineral se encontró un contenido medio de 48 cl. Sabiendo que la variable "contenido de agua de una botella" sigue una ley Normal con desviación típica 5 cl, determine un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 95%.

Datos del problema: n = 100; $\overline{x}$ = 48; σ = 5; nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, con la cual α/2 = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$, mirando en las tablas de la N(0,1)v vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(48 - 1'96\cdot\frac{5}{\sqrt{100}}, 48 + 1'96\cdot\frac{5}{\sqrt{100}}\right)$ **= (47'02,48'98)**

b)
¿Qué tamaño muestral mínimo debería considerase para estimar esta media con el mismo nivel de confianza y un error inferior a 0'5 cl?

Datos del problema: Error = E = 0'5, σ = 5, igual nivel de confianza = 95% nos da $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.

De error = E ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 0'5, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$ =

= $\left(\frac{1'96\cdot 5}{0'5}\right)^2$ = 384'16, es decir **el tamaño mínimo es de n = 385 botellas de agua.**

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)

Se dispone de 160 m de tejido de pana y 240 m de tejido de lana para hacer trajes y abrigos. Se usa 1 m de pana y 2 m de lana para cada traje, y 2 m de pana y 2 m de lana para cada abrigo. Cada traje se vende a 250 € y cada abrigo a 350 €.
a) (2 puntos) ¿Cuántos trajes y abrigos se deben confeccionar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?
b) (0'5 puntos) ¿Pueden hacerse 60 trajes y 50 abrigos con esas cantidades de tejido? En caso afirmativo, ¿obtendría el máximo beneficio al venderlo todo?

Solución

Se dispone de 160 m de tejido de pana y 240 m de tejido de lana para hacer trajes y abrigos. Se usa 1 m de pana y 2 m de lana para cada traje, y 2 m de pana y 2 m de lana para cada abrigo. Cada traje se vende a 250 € y cada abrigo a 350 €.
a) (2 puntos) ¿Cuántos trajes y abrigos se deben confeccionar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?
b) (0'5 puntos) ¿Pueden hacerse 60 trajes y 50 abrigos con esas cantidades de tejido? En caso afirmativo, ¿obtendría el máximo beneficio al venderlo todo?

Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de trajes.
Sea y = nº de abrigos.
Para determinar las inecuaciones y la función objetivo F(x,y), ponemos un cuadro de doble entrada que nos lo simplificará.

	Tejido de pana	Tejido de lana	Precios
Trajes (x)	1	2	250 €
Abrigos (y)	2	2	350 €
Total	160 m	240 m	

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos las siguientes inecuaciones, y la función beneficio:

De "Se usa 1 m de pana para cada traje y 2 m de pana para cada abrigo" $\rightarrow$ $1x + 2y \le 160$.
De "Se usa 2 m de lana para cada traje y 2 m de lana para cada abrigo" $\rightarrow$ $2x + 2y \le 240$.
De "se fabrica algún traje y algún abrigo" $\rightarrow$ $x \ge 0$, $y \ge 0$.
De "Cuántos trajes y abrigos se deben confeccionar para obtener el máximo beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?", tenemos la función a optimizar es $B(x,y) = F(x,y) = 250x + 350y$.

Resumiendo:
Función a optimizar es $F(x,y) = 250x + 350y$.
Restricciones: $x + 2y \le 160$; $2x + 2y \le 240$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

Las desigualdades $x + 2y \le 160$; $2x + 2y \le 240$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $x + 2y = 160$; $2x + 2y = 240$; $x = 0$; $y = 0$
Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

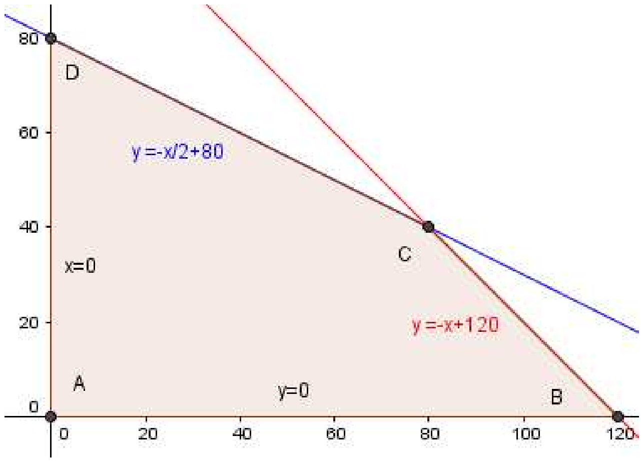
$$y = -x/2 + 80; \quad y = -x + 120; \quad x = 0; \quad y = 0$$

Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = 0$, tenemos el vértice A(0,0).
De $y = 0$ e $y = -x+120$, tenemos $0 = -x+120 \rightarrow x = 120$, y el vértice es B(120,0).
De $y = -x+120$ e $y = -x/2+80$, tenemos $-x+120 = -x/2 + 80 \rightarrow -2x+240 = -x + 160 \rightarrow 80 = x$, con lo cual $y = -(80)+120 = 40$, y el vértice es C(80,40).
De $x = 0$ e $y = -x/2 + 80$, tenemos $y = 80$, y el vértice es D(0,80).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(0,0), B(120,0), C(80,40) y D(0,80).

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, que es el polígono convexo limitado por los vértices A, B, C, y D de los cortes de dichas rectas, cuyos lados son los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Veamos la solución óptima de la función F(x,y) = 250x + 350y en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(120,0), C(80,40) y D(0,80). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 250(0) + 350(0) = 0; F(120,0) = 250(120) + 350(0) = 30000;
F(80,40) = 250(80) + 350(40) **= 34000**; F(0,50) = 250(0) + 350(50) = 17500.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 34000** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(80,40), por tanto el máximo beneficio es de 34000 €, y se obtiene fabricando 80 trajes y 40 abrigos.**
b)
¿Pueden hacerse 60 trajes y 50 abrigos con esas cantidades de tejido? En caso afirmativo, ¿obtendría el máximo beneficio al venderlo todo?

Hay que ver si el punto (x,y) = (60,50) está en el recinto limitado por las inecuaciones, verificando todas las inecuaciones.
$x + 2y \le 160$ $\rightarrow$ $(60) + 2(50) \le 160$ $\rightarrow$ $160 \le 160$, lo cual **es cierto**.
$2x + 2y \le 240$ $\rightarrow$ $2(60) + 2(50) \le 160$ $\rightarrow$ $220 \le 240$, lo cual **es cierto**.
$x \ge 0$ $\rightarrow$ $60 \ge 0$, lo cual **es cierto**
$y \ge 0$ $\rightarrow$ $50 \ge 0$, lo cual **es cierto**
Por tanto **si se pueden fabricar 60 trajes y 50 abrigos** con esas cantidades de tejido**.**
En este caso el beneficio es F(60,50) = 250(60) + 350(50) = 32500 €**,** que **no es el máximo beneficio que era 34000 €**

EJERCICIO 2 (B)
Sea la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 8$.
a) (1'7 puntos) Halle las coordenadas de sus extremos relativos y de su punto de inflexión, si existen.
b) (0'8 puntos) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = 1.

Solución

Sea la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 8$.
a)
Halle las coordenadas de sus extremos relativos y de su punto de inflexión, si existen.
Sabemos que los extremos relativos anulan la 1ª derivada y no anulan la 2ª derivada, en concreto:
Si f '(a) = 0 y f ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo de f.
Si f '(a) = 0 y f ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo de f.
Sabemos que los puntos de inflexión anulan la 2ª derivada y no anulan la 3ª derivada, en concreto:
Si f ''(b) = 0 y f '''(b) ≠ 0, x = b es un punto de inflexión de f.
$f(x) = x^3 - 9x^2 + 8$; $f'(x) = 3x^2 - 18x$; $f''(x) = 6x - 18$; $f'''(x) = -18$.

De f'(x) = 0, tenemos $3x^2 - 18x = 0 = x(3x - 18)$, de donde x = 0 y x = 6, que son los posibles extremos

relativos de f.
Como f '(0) = 0 y f ''(0) = 6(0) – 18 = -18 < 0, **f(x) tiene un máximo relativo en x = 0, que vale f(0) = 8**.
Como f '(6) = 0 y f ''(6) = 6(6) – 18 = 18 > 0, **f(x) tiene un mínimo relativo en x = 6, que vale f(6) = -100**.
De f ''(x) = 0, tenemos 6x – 18 = 0, de donde x = 3 que será el posible punto de inflexión de f.
Como f ''(3) = 0 y f '''(3) = – 18 = -18 ≠ 0**, x = 3 es punto de inflexión de f que vale f(3) = -46**.
b)
Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = 1.
La recta tangente en x = 1 es y - f(1) = f '(1)·(x - 1)
f(x) = x^3 - $9x^2$ + 8 → f(1) = $(1)^3$ – $9(1)^2$ + 8 = 9 - 9 = 0.
f '(x) = $3x^2$ - 18x → f '(x) = $3(1)^2$ – 18(1) = -15.
La recta tangente en x = 1 es **y - (0) = -15·(x - 1)**, de donde **y = -15x + 15.**

EJERCICIO 3 (B)

En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas. En otra urna B hay 4 bolas verdes, 5 rojas y 1 negra. Se lanza un dado, si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A, y si sale mayor o igual que 3 se saca una bola de la urna B.
a) (0'5 puntos) Calcule la probabilidad de que la bola sea verde si ha salido un 4.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que la bola elegida sea roja.
c) (1 punto) Sabiendo que ha salido una bola verde, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

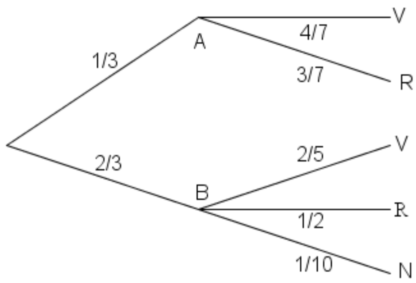
Solución

En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas. En otra urna B hay 4 bolas verdes, 5 rojas y 1 negra. Se lanza un dado, si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A, y si sale mayor o igual que 3 se saca una bola de la urna B.

Llamemos A, B, V, R y N, a los sucesos siguientes, "elegir la urna A", "elegir la urna B", "sacar bola verde", "sacar bola roja" y "sacar bola negra", respectivamente.

Datos del problema p(A) = 2/6 = 1/3; p(B) = 4/6 = 2/3; p(V/A) = 8/14 = 4/7 ; p(V/B) = 4/10 = 2/5, p(R/A) = 6/14 = 3/7; p(R/B) = 5/10 = 1/2; p(N/B) = 1/10 ....

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
Calcule la probabilidad de que la bola sea verde si ha salido un 4.

Me piden p(verde en la urna B) = p(V/B) = 4/10 = 2/5.
b)
Calcule la probabilidad de que la bola elegida sea roja.

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de sacar bola roja es:
p(R) = p(A).p(R/A) + p(B).p(R/B) = (1/3)·(3/7) + (2/3)·(1/2) = 10/21 **= 10/21 ≅ 0'47619**.
c)
Sabiendo que ha salido una bola verde, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de sacar bola verde es:
p(V) = p(A).p(V/A) + p(B).p(V/B) = (1/3)·(4/7) + (2/3)·(2/5) = 10/21 = *16/35*.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(A/V) =} \frac{p(A \cap V)}{p(V)} = \frac{p(A).p(V/A)}{p(V)} = \frac{(1/3)\cdot(4/7)}{(16/35)} \mathbf{= (5/12) = 0'41667}.$$

EJERCICIO 4 (B)

La concentración de arsénico en los moluscos de una zona costera sigue una ley Normal de desviación típica 6 mg/kg. Para verificar la calidad de estos moluscos se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 para contrastar si la media poblacional no supera el límite máximo de 80 mg/kg permitido por la normativa sanitaria ($H_o : \mu \le 80$).
a) (1'5 puntos) Determine la región crítica de este contraste a un nivel de significación del 5%.
b) (1 punto) ¿Debe rechazarse esta hipótesis nula, al nivel del 5%, si en esa muestra de 36 moluscos se encuentra una concentración media de arsénico de 82 mg/kg?

Solución

La concentración de arsénico en los moluscos de una zona costera sigue una ley Normal de desviación típica 6 mg/kg. Para verificar la calidad de estos moluscos se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 para contrastar si la media poblacional no supera el límite máximo de 80 mg/kg permitido por la normativa sanitaria ($H_o : \mu \le 80$).
a) y b)
Determine la región crítica de este contraste a un nivel de significación del 5%.
¿Debe rechazarse esta hipótesis nula, al nivel del 5%, si en esa muestra de 36 moluscos se encuentra una concentración media de arsénico de 82 mg/kg?

Del problema tenemos desviación típica poblacional = σ = 6, tamaño de la muestra n = 36, media = μ = $\overline{x}$ = = 82, luego $X \to N(\mu,6)$, y *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:*
$N(\overline{x}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(82, \frac{5}{\sqrt{36}})$
Trabajaremos con lo normal N(0,1), tipificada de la normal muestral.
También nos dicen que $H_0 : \mu_0 \le 80$, con un nivel de significación de α = 5% = 0'05.

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

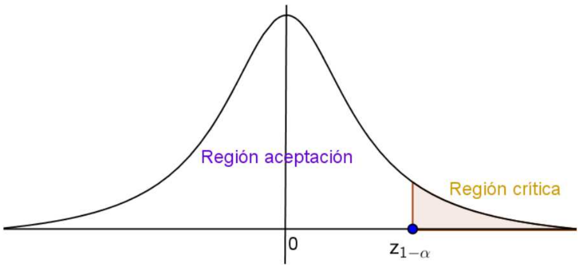
El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \le 80$ (la media poblacional no supera el límite máximo de 80 mg/kg) y $H_1 : \mu_0 > 80$, lo cual *nos indica la dirección del contraste, es un contraste unilateral por la derecha*, *por tanto la región crítica está a la derecha del punto crítico* $z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.
Para el nivel de significación es α = 0'05, luego tenemos un nivel de confianza o probabilidad = 1 - α = 0'95.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ = 1 – 0'05 = 0'95, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y los valores más próximos es 0'9495 y 0'9505 que corresponden a 1'64 y 1'65, por tanto el **valor crítico** es la media de ambos **$z_{1-\alpha}$ =** (1'64 + 1'65)/2 **= 1'645**, que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.
En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y

el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{82 - 80}{6/\sqrt{36}} = 2$.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba z_0 = 2 está a la derecha** del punto crítico **$z_{1-\alpha}$ = 1'645**, **estamos en la zona de rechazo o región crítica**.

Resumiendo, **rechazamos la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \leq 80$ para un nivel de significación $\alpha = 0'05$ y aceptamos la hipótesis alternativa H_1 : $\mu_0 > 80$**

Con lo cual, con un nivel de significación del 5%, afirmamos que la media poblacional supera el límite máximo de 80 mg/kg permitido por la normativa sanitaria.