

**Opción A****Ejercicio 1 opción A, modelo 5 Septiembre 2016**

[2'5 puntos] Sabiendo que  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{m}{2x} \right)$  es finito, calcula "m" y el valor del límite.

**Solución**

Sabiendo que  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{m}{2x} \right)$  es finito, calcula "m" y el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{m}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - m \cdot (e^x - 1)}{(e^x - 1) \cdot 2x} = \left\{ \frac{0 - 0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0}; L'H \right\} =$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H) (si "f" y "g" son funciones continuas en  $[a - \delta, a + \delta]$ , derivables en  $(a - \delta, a + \delta)$ , verificando que  $f(a) = g(a) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ , entonces si existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  se verifica que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}. \text{ La regla es válida si tenemos } \infty/\infty, \text{ y también si } x \rightarrow \infty, \text{ con lo cual tenemos}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - m \cdot e^x}{e^x \cdot 2x + (e^x - 1) \cdot 2} = \frac{2 - m}{0 + 0} = \frac{2 - m}{0}.$$

Como me dicen que el límite es finito, **el numerador ha de ser cero**, para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital puesto que el límite es un número, es decir  $2 - m = 0$ , de donde  **$m = 2$** .

Volviéndole a aplicar la regla de L'Hôpital, con  $m = 2$ , tenemos:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cdot e^x}{e^x \cdot 2x + (e^x - 1) \cdot 2} = \left\{ \frac{2 - 2}{0 + 0} = \frac{0}{0}; L'H \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot e^x}{e^x \cdot 2x + e^x \cdot 2 + e^x \cdot 2} = \frac{-2}{0 + 2 + 2} = \frac{-1}{2}.$$

Resumiendo **el valor de m es 2 y el valor del límite es -1/2**.

**Ejercicio 2 opción A, modelo 5 Septiembre 2016**

[2'5 puntos] Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x^4$ . Encuentra la recta horizontal que corta a la gráfica de  $f$  formando con ella un recinto con área  $\frac{8}{5}$ .

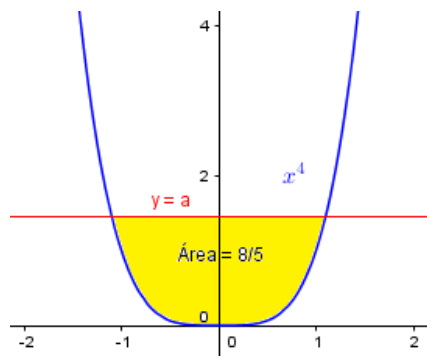
**Solución**

La gráfica de  $f(x) = x^4$  (es una función par  $f(-x) = f(x)$ , por tanto simétrica respecto al eje OY) es parecida a la de la parábola  $f(x) = x^2$ , pero un poco más cerrada.

$f(x) = x^4 \geq 0$ , siempre, pasa por  $(0,0)$ ,  $(-1,1)$ ,  $(1,1)$ ,  $(-2,16)$ ,  $(2,16)$ , ...

Una recta horizontal es de la forma  $y = a$ , que es paralela al eje OX.

Un esbozo de las gráficas es



Observamos que el recinto es simétrico respecto al eje OY, luego podemos calcular sólo el área para  $x > 0$ , y multiplicándolo por 2.

Calculamos los cortes de  $y = a$  con la función  $f(x) = x^4$ , para lo cual lo igualamos:

$a = x^4$ , de donde  $x^4 = a$  y las soluciones son  $x = \pm \sqrt[4]{a}$ . Sólo utilizaremos la parte positiva  $x = + \sqrt[4]{a}$ .

$$\text{Área} = 8/5 = 2 \cdot \int_0^{\sqrt[4]{a}} (a - x^4) dx = 2 \cdot \left[ ax - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt[4]{a}} = 2 \cdot \left( a \sqrt[4]{a} - \frac{(\sqrt[4]{a})^5}{5} - 0 \right) = 2 \cdot \left( \sqrt[4]{a^5} - \frac{\sqrt[4]{a^5}}{5} \right) = 2 \cdot \left( \frac{4 \sqrt[4]{a^5}}{5} \right) = \frac{8 \sqrt[4]{a^5}}{5}.$$

Igualando tenemos  $\frac{8}{5} = \frac{8 \sqrt[4]{a^5}}{5}$ , de donde  $1 = \sqrt[4]{a^5}$ , es decir  $a^5 = 1$ , por tanto  $a = \sqrt[5]{1} = 1$ , **es decir la recta pedida es  $y = 1$** .

## Ejercicio 3 opción A, modelo 5 Septiembre 2016

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales 
$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x - 11y + 9z = \lambda \\ x - 3y + 5z = 2 \end{cases},$$

- a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro  $\lambda$ .  
 b) [0'75 puntos] Resuélvelo, si es posible, para  $\lambda = 4$ .

## Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales 
$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 1 \\ 5x - 11y + 9z = \lambda \\ x - 3y + 5z = 2 \end{cases},$$

a)

Discute el sistema según los valores del parámetro  $\lambda$ .

La matriz de los coeficientes del sistema es  $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada  $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ .

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 5F_3 \\ F_2 - 5F_3 \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -16 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$ , por tener dos filas proporcionales.

En  $A$  como  $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2 \neq 0$ , tenemos que  $\text{rango}(A) = 2$ , independientemente del valor de  $\lambda$ .

También se puede hacer por Gauss (está preparado)

$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Cambio} \\ F_1 \text{ por } F_3 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 5 & -11 & 9 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Cambio} \\ F_2 \text{ por } F_3 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -16 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , y,

y  $\text{rango}(A) = 2$ , por tener una matriz escalonada con dos filas con elementos distintos de cero

En  $A^*$  como  $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 5 & -11 & \lambda \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_1 - 2F_3 \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -11 & \lambda \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = 0 - 2(10 - \lambda) + (-3) \cdot (-15 + 11) = -20 + 2\lambda + 12 =$

$= 2\lambda - 8$ . (se anula para  $\lambda = 4$ )

También se puede hacer por Gauss (está preparado)

$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Cambio} \\ F_1 \text{ por } F_3 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Cambio} \\ F_2 \text{ por } F_3 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 9 & \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 4 & -16 & \lambda - 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$ , y vemos que la última fila de la matriz escalonada se hace cero si  $\lambda = 4$

Discusión.

Si  $\lambda \neq 4$ ,  $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$ , y el sistema es incompatible y no tiene solución

Si  $\lambda = 4$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ$  de incógnitas, y el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones (más de una solución).

b)

Resuélvelo, si es posible, para  $\lambda = 4$ .

Hemos visto en el apartado (a) que, si  $\lambda = 4$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ$  de incógnitas, y el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones (más de una solución).

Como el rango es 2 tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, tomamos la 1ª y la 3ª que son las ecuaciones con los que he formado el menor de orden 2 distinto de cero para determinar el rango de  $A$ .

$$2x - 4y + 2z = 1. \quad F_1 - 2F_2 \rightarrow 0 + 2y - 8z = -3 \rightarrow y = -3/2 + 4z$$

$$x - 3y + 5z = 2. \quad \rightarrow x - 3y + 5z = 2 \rightarrow x = 2 + 3y - 5z. \text{ Tomando } \mathbf{z} = \mathbf{b} \in \mathbb{R}, \text{ tenemos}$$

$$y = -3/2 + 4b, \quad y \quad x = 2 + 3 \cdot (-3/2 + 4b) - 5b = -5/2 + 7b.$$

Las infinitas soluciones del sistema son  $(x, y, z) = (-5/2 + 7b, -3/2 + 4b, b)$  con  $b \in \mathbb{R}$

**Ejercicio 4 opción A, modelo 5 Septiembre 2016**

Considera el punto  $A(1,-1,1)$  y la recta "r" dada por 
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} .$$

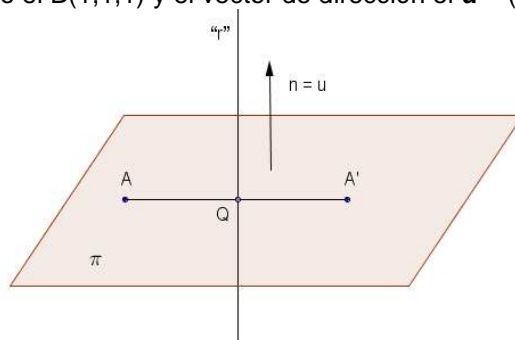
- (a) [1'5 puntos] Calcula las coordenadas del punto simétrico de A respecto a "r".  
 (b) [1 punto] Determina la ecuación del plano que contiene a "r" y pasa por A.

**Solución**

Considera el punto  $A(1,-1,1)$  y la recta "r" dada por 
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} .$$

- (a)  
 Calcula las coordenadas del punto simétrico de  $A(1,-1,1)$  respecto a "r".

De la recta "r", tomamos el punto el  $B(1,1,1)$  y el vector de dirección el  $\mathbf{u} = (2,-1,0)$ .



Calculamos el plano "pi" perpendicular a la recta "r" por el punto A, el vector normal del plano  $\mathbf{n}$  es el vector director de la recta  $\mathbf{u} = (2,-1,0)$ .

$$\pi \equiv \mathbf{AX} \cdot \mathbf{n} = 0 = (x-1, y+1, z-1) \cdot (2,-1,0) = 2x - y - 3 = 0.$$

Calculamos el punto de corte Q del plano "pi" con la recta "r", sustituyendo la recta en el plano:

$$2(1+2\lambda) - (1-\lambda) - 3 = 0 \rightarrow -2 + 5\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2/5.$$

El punto Q es  $Q(1 + 2(2/5), 1 - (2/5), 1) = Q(9/5, 3/5, 1)$ .

El punto  $A'(x,y,z)$  se calcula sabiendo que el punto Q es el punto medio del segmento  $AA'$ .

$$(9/5, 3/5, 1) = ((x+1)/2, (y-1)/2, (z+1)/2), \text{ de donde:}$$

$$9/5 = (x+1)/2 \rightarrow x = 13/5.$$

$$3/5 = (y-1)/2 \rightarrow y = 11/5.$$

$$1 = (z+1)/2 \rightarrow z = 1.$$

**El simétrico  $A'$  de A respecto a la recta "r" es  $A'(13/5, 11/5, 1)$ .**

(b)

Determina la ecuación del plano que contiene a "r" y pasa por  $A(1,-1,1)$ .

Para un plano necesito un punto, el B (punto de la recta) y dos vectores independientes, el  $\mathbf{u}$  (vector director de la recta) y el  $\mathbf{AB}$ . (También se puede obtener con un punto y un vector normal).

Un punto de "r" es  $B(1, 1, 1)$  y un vector director es  $\mathbf{u} = (2,-1,0)$ .

El vector  $\mathbf{BA}$  es  $\mathbf{BA} = (0,-2,-0)$

**La ecuación del plano en forma vectorial es:  $\pi_1 \equiv (1,1,1) + \lambda(2,-1,0) + \mu(0,-2,0)$ , con  $\lambda$  y  $\mu$  números reales.**

**Opción B****Ejercicio 1 opción B, modelo 5 Septiembre 2016**

(Ejercicio 1 opción B, Septiembre Reserva\_1 2014)

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$ .

- a) [0'75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de  $f$ .  
 b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$  y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).  
 c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de  $f$ .

**Solución**

Considera la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 e^{-x^2} = \frac{x^2}{e^{x^2}}$ .

a)

Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

**Asíntotas verticales (A.V.)** (la recta  $x = a$  es A.V. si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ )

Como no hay números que anulen el denominador, recordamos que la exponencial no se anula nunca,  $f$  no tiene A.V.

**Asíntotas horizontales (A.H.)** (la recta  $y = b$  es A.H. si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ )

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2}{e^{x^2}} \right) = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \\ +\infty \end{array} \right., \text{ L'Hôpital, L'H, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Bigg\} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{2x}{2xe^{x^2}} \right) =$$

$= \{\text{simplifico}\} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{1}{e^{x^2}} \right) = 1/+\infty = 0^+, \text{ la recta } y = 0 \text{ es una A.H. en } \pm\infty, \text{ y la función } f(x) \text{ está por encima de la A.H. } y = 0.$

Como la función  $f(x)$  tiene asíntota horizontal en  $\pm\infty$ , y no es una función a trozos,  **$f(x)$  no tiene asíntotas oblicuas en  $\pm\infty$ .**

b)

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Me están pidiendo la monotonía. El estudio de la 1ª derivada

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2} \cdot (2x) \cdot (1 - x^2)$$

De  $f'(x) = 0$ , tenemos  $(2x) \cdot (1 - x^2) = 0$ , puesto que la exponencial  $e^{-x^2}$  nunca se anula.

Las soluciones de  $(2x) \cdot (1 - x^2) = 0$ , son  $x = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = -1$ , que serán los posibles extremos relativos.

Como  $f'(-2) = (+) \cdot (-4) \cdot (-3) = (+) \cdot (12) > 0$ ,  $f(x)$  es estrictamente creciente ( $\nearrow$ ) en  $(-\infty, -1)$

Como  $f'(-0'5) = (+) \cdot (-1) \cdot (0'75) = (+) \cdot (-0'75) < 0$ ,  $f(x)$  es estrictamente decreciente ( $\searrow$ ) en  $(-1, 0)$

Como  $f'(0'5) = (+) \cdot (1) \cdot (0'75) = (+) \cdot (0'75) > 0$ ,  $f(x)$  es estrictamente creciente ( $\nearrow$ ) en  $(0, 1)$

Como  $f'(2) = (+) \cdot (4) \cdot (-3) = (+) \cdot (-12) < 0$ ,  $f(x)$  es estrictamente decreciente ( $\searrow$ ) en  $(1, +\infty)$

Por definición  $x = -1$  es un máximo relativo que vale  $f(-1) = (-1)^2 \cdot e^{-1} = 1/e \cong 0'37$ .

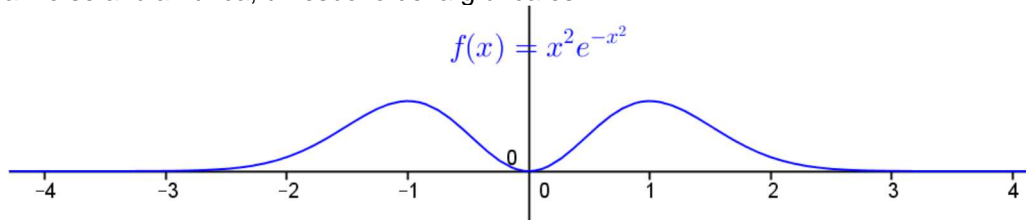
Por definición  $x = 0$  es un mínimo relativo que vale  $f(0) = (0)^2 \cdot e^0 = 0$ .

Por definición  $x = 1$  es un máximo relativo que vale  $f(1) = (1)^2 \cdot e^{-1} = 1/e \cong 0'37$ .

c)

Esboza la gráfica de  $f$ .

Teniendo en cuenta lo anterior, de que para  $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$ , y de que de  $f(x) = 0 \rightarrow x^2 = 0$ , puesto que la exponencial no se anula nunca, un esbozo de la gráfica es

**Ejercicio 2 opción B, modelo 5 Septiembre 2016**

[2'5 puntos] Calcula  $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$  (sugerencia  $t = \sqrt{x}$ ).

**Solución**

Calcula  $I = \int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$ , nos dan el cambio  $t = \sqrt{x}$ , es decir  $t^2 = x$ , luego  $2t \cdot dt = dx$ , y sustituyendo nos queda

$$I = \int \frac{t^2}{1+t} 2t dt = \int \frac{2t^3}{1+t} dt, \text{ que es una integral racional. Dividimos y descomponemos en factores simples}$$

el denominador, si hiciese falta.

$$\begin{array}{r} 2t^3 \\ -2t^3 - 2t^2 \\ \hline -2t^2 \\ 2t^2 + 2t \\ \hline 2t \\ -2t - 2 \\ \hline -2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} t + 1 \\ 2t^2 - 2t + 2 \end{array} \right.$$

Recordamos que  $I = \int (\text{Cociente} + \text{Resto} / \text{Divisor}) dt = \int (2t^2 - 2t + 2) dt + \int \frac{-2}{1+t} dt =$

$$= 2t^3/3 - t^2 + 2t - 2 \cdot \ln|t + 1| + K = \{ \text{quito el cambio } t = \sqrt{x} \} = \frac{2(\sqrt{x})^3}{3} - x + 2 \cdot \sqrt{x} - 2 \cdot \ln|\sqrt{x} + 1| + K.$$

**Ejercicio 3 opción B, modelo 5 Septiembre 2016**

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) [1 punto] Calcula el rango de  $AB^T + \lambda I$  según los valores de  $\lambda$  ( $B^T$  es la matriz traspuesta de B e I es la matriz identidad de orden 3).
- (b) [1'5 puntos] Calcula la matriz X que verifica  $CX - X = 2I$ .

**Solución**

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Calcula el rango de  $AB^T + \lambda I$  según los valores de  $\lambda$  ( $B^T$  es la matriz traspuesta de B e I es la matriz identidad de orden 3).

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

$$AB^T + \lambda I = C + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0+\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\det(AB^T + \lambda I) = |AB^T + \lambda I| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{array} = 0 - 0 + \lambda \cdot ((\lambda+1) \cdot (\lambda-1) + 1) = \lambda \cdot (\lambda^2) = \lambda^3.$$

De  $\det(AB^T + \lambda I) = 0$ , tenemos  $\lambda^3 = 0$ , de donde  $\lambda = 0$ .  
 Si  $\lambda \neq 0$ ,  $\det(AB^T + \lambda I) \neq 0$  y por tanto **rango( $AB^T + \lambda I$ ) = 3**.

Si  $\lambda = 0$ ,  $AB^T + \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y por tanto **rango( $AB^T + \lambda I$ ) = 1**, por que tenemos una

matriz escalonada con *una sola fila* donde hay *números no nulos*.

- (b) Calcula la matriz X que verifica  $CX - X = 2I$ .

De  $CX - X = 2I$ , tenemos  $(C - I) \cdot X = 2I$ .

$$C - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D.$$

La ecuación  $CX - X = 2I$  se transforma en la ecuación  $D \cdot X = 2I$ .

Como  $|D| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$  Adjuntos tercera =  $-1(0+1) = -1 \neq 0$ , la matriz D tiene matriz inversa  $D^{-1} = (1/|D|) \cdot \text{Adj}(D^t)$ .

Multiplicando la expresión  $D \cdot X = 2I$  por la izquierda por la matriz  $D^{-1}$ , tenemos:

$$D^{-1}DX = D^{-1} \cdot 2I \rightarrow I \cdot X = 2 \cdot D^{-1} \cdot I \rightarrow X = 2 \cdot D^{-1}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \text{Adj}(D^t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; D^{-1} = (1/|D|) \cdot \text{Adj}(D^t) = (1/-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Luego } X = 2 \cdot D^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

#### Ejercicio 4 opción B, modelo 5 Septiembre 2016

[2'5 puntos] Calcula la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones

$$x = y = z \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

#### Solución

Calcula la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones

$$r \equiv x = y = z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

De "r" tenemos  $O(0,0,0)$  y  $\mathbf{u} = (1,1,1)$

De "s" tenemos  $A(1,3,0)$  y  $\mathbf{v} = (1,1,-1)$ . Observamos que los vectores no son proporcionales por tanto las rectas no son paralelas.

Calculamos la distancia entre las rectas, como la distancia de un punto de una recta, el  $O(0,0,0)$  a un plano que contiene a la otra y es paralelo a la primera

De "r" tenemos  $O(0,0,0)$  y  $\mathbf{u} = (1,1,1)$

De "s" tenemos  $A(1,3,0)$  y  $\mathbf{v} = (1,1,-1)$ .

El plano  $\pi$  que contiene a la recta "s" y es paralelo a la recta "r" tiene de ecuación:

$$\det(\mathbf{AX}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = (x-1)(1+1) - (y-3)(1+1) + (z)(1-1) = 2x - 2y + 4 = x - y + 2 = 0$$

$$d(r;s) = d(O; \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|(0) - (0) + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} u^1.$$

También se puede tomar un punto genérico de "r" el  $X(a,a,a)$ , otro de "s" el  $Y(1+\mu, 3+\mu, -\mu)$ , formar el vector  $\mathbf{XY}$  e imponerle la condición de perpendicularidad a la vez a las rectas "r" y "s" es decir  $\mathbf{XY} \cdot \mathbf{u} = 0$  y  $\mathbf{XY} \cdot \mathbf{v} = 0$ . Obtenemos los puntos X e Y, que son los que están a la mínima distancia de las rectas "r" y "s", con lo cual  $d(r,s) = d(X,Y) = \|\mathbf{XY}\|$  y sale  $\sqrt{2} u^1$ .