OPCIÓN A

16_mod1_sep_EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) (1'7 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A^2\cdot X + C = 2B$.

b) (0'8 puntos) ¿Qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que las matrices (B+C)·P y B·Q·C. sean cuadradas?

Solución

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

a)

Resuelva la ecuación matricial $A^2\cdot X + C = 2B$.

$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Como $\det(A^2) = |A^2| = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 8 = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa $(A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|}\cdot Adj((A^2)^t)$.

También sabemos que $(A^2)^{-1} = A^{-1}\cdot A^{-1}$.

De $A^2\cdot X + C = 2B$, tenemos $A^2\cdot X = 2B - C$. Multiplicando ambos miembros por la izquierda por $(A^2)^{-1}$ tenemos: $(A^2)^{-1}\cdot A^2\cdot X = (A^2)^{-1}\cdot(2B – C)$ $\rightarrow$ $I\cdot X = (A^2)^{-1}\cdot(2B – C$ $\rightarrow$ **$X = (A^2)^{-1}\cdot(2B – C)$.**

Calculamos $(A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|}\cdot Adj((A^2)^t)$, $|A^2| = 1$; $(A^2)^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es $(A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|}\cdot Adj((A^2)^t) = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

$2B - C = 2\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

La matriz es **$X = (A^2)^{-1}\cdot(2B – C) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 & -19 & 58 \\ -16 & 5 & -16 \end{pmatrix}$.**

b)

¿Qué dimensiones deben tener las matrices P y Q para que las matrices (B+C)·P y B·Q·C. sean cuadradas?

Sabemos que para que se puedan multiplicar dos matrices, de izquierda a derecha, el número de columnas de la primera tiene que coincidir con el número de filas de la segunda, y el producto tiene por filas las de la primera matriz y por columnas la de la segunda matriz.

$(B+C)_{2x\mathbf{3}}\cdot P_{\mathbf{3}x2}$. **Por tanto la matriz P es de orden 3x2,** y el producto es cuadrada de orden 2x2**.**

$B_{2x\mathbf{3}}\cdot Q_{\mathbf{3}x\mathbf{3}}\cdot C^t_{\mathbf{3}x2}$. **Por tanto la matriz Q es de orden 3x3,** y el producto es cuadrada de orden 2x2**.**

16_mod1_sep_EJERCICIO 2 (A)

De una función continua y derivable *f*, se sabe que la gráfica de la función derivada *f '*, es una parábola que pasa por los puntos (-1,0) y (3,0) y que tiene su vértice en el punto (1,-2)

a) (1'5 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*, así como la existencia de sus extremos.

b) (1 punto) Si f(1) = 2, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa x = 1.

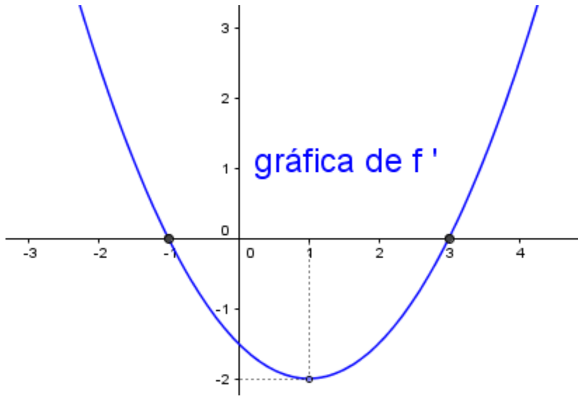
Solución

De una función continua y derivable *f*, se sabe que la gráfica de la función derivada *f '*, es una parábola que pasa por los puntos (-1,0) y (3,0) y que tiene su vértice en el punto (1,-2)

a)

Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*, así como la existencia de sus extremos.

Con los datos anteriores la gráfica de f ' (es una parábola, que tiene el vértice debajo de los cortes con el eje OX, con las ramas hacia arriba), y es parecida a:



Observando la gráfica de f '(x) vemos que f '(x) > 0 (encima del eje OX) en el intervalo (-∞,-1), es decir *f es estrictamente creciente* $(\nearrow)$ en el intervalo (-∞,-1).

Observando la gráfica de f '(x) vemos que f '(x) < 0 (debajo del eje OX) en el intervalo (-1,3), es decir *f es estrictamente decreciente* $(\searrow)$ en el intervalo (-1,3).

Observando la gráfica de f '(x) vemos que f '(x) > 0 (encima del eje OX) en el intervalo (3,+∞), es decir *f es estrictamente creciente* $(\nearrow)$ en el intervalo (3,+∞).

Por definición x = -1 es un máximo relativo. (a su izquierda *f* crece y a su derecha *f* decrece)
Por definición x = 3 es un mínimo relativo. (a su izquierda *f* decrece y a su derecha *f* crece)
b)
Si f(1) = 2, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa x = 1.

La ecuación de la recta tangente en x = 1 es *"y - f(1) = f '(1)·(x - 1)"*
Me dicen que f(1) = 2, y que la gráfica de f ' pasa por (1,-2), es decir me dan f '(1) = - 2, por tanto la ecuación de **la recta tangente pedida es "y - 2 = -2·(x - 1)".**

16_mod1_sep_EJERCICIO 3 (A)
Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que P(A) = 0'3, P(B) = 0'6, $P(A^C \cap B^C)$ = 0'28.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra A sabiendo que no ha ocurrido B.
c) (0'5 puntos). ¿Son A y B independientes?

Solución

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que P(A) = 0'3, P(B) = 0'6, $P(A^C \cap B^C)$ = 0'28.
a)
Calcule la probabilidad de que ocurran ambos sucesos a la vez.

Me están pidiendo **$p(A \cap B)$**

Del problema tenemos: p(A) = 0'3, p(B) = 0'6, $p(A^C \cap B^C)$ = 0'28.
0'28 = $p(A^C \cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A \cup B)^C$ = {suceso contrario} = 1 - $p(A \cup B)$; de donde:
$p(A \cup B)$ = 1 – 0'28 = 0'72.

De $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, tenemos 0'72 = 0'3 + 0'6 - $p(A \cap B)$, luego **$p(A \cap B)$ =** 0'3+0'6-0'72 **= 0'18.**
b)
Calcule la probabilidad de que ocurra A sabiendo que no ha ocurrido B.

Me están pidiendo **$p(A/B^C)$**

Sabemos que *$p(B^C)$* = 1 - p(B) = 1 – 0'6 = *0'4*. *$p(A \cap B^C)$* = p(A) - $p(A \cap B)$ = 0'3 – 0'18 = *0'12*.

Por tanto **$p(A/B^C)$ =** $\frac{p(A \cap B^C)}{p(B^C)}$ = 0'12/0'4 = 3/10 **= 0'3**.

c)
¿Son independientes A y B?

A y B son independientes si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Como **$p(A \cap B)$ = 0'18 = $p(A) \cdot p(B)$** =0'3·0'6 **= 0'18**, **los sucesos A y B son independientes.**

16_mod1_sep_EJERCICIO 4 (A)

Una cadena de hipermercados decide estudiar la proporción de artículos de un determinado tipo que tienen defectos en el envoltorio. Para ello, selecciona aleatoriamente 2000 artículos de este tipo entre sus hipermercados y encuentra que 19 de ellos tienen defectos en su envoltorio.

a) (1'5 puntos) Determine un intervalo, al 95% de confianza, para la proporción real de artículos con este tipo do e interprete el resultado obtenido.

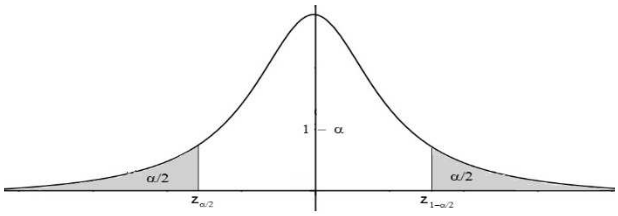
b) (1 punto) ¿Cuántos artículos, como mínimo, deberá seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99%, la proporción muestral difiera de la proporción real a lo sumo en un 1%?

Solución

*Sabemos que si $n \geq 30$ para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue*

una normal $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y gener*almente*

escribimos $\boldsymbol{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *o* $\boldsymbol{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$.



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

*I.C.(**p**)* = $\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ = *(b-a)*

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es* $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Una cadena de hipermercados decide estudiar la proporción de artículos de un determinado tipo que tienen defectos en el envoltorio. Para ello, selecciona aleatoriamente 2000 artículos de este tipo entre sus hipermercados y encuentra que 19 de ellos tienen defectos en su envoltorio.

a)

Determine un intervalo, al 95% de confianza, para la proporción real de artículos con este tipo do e interprete el resultado obtenido.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 19/2000 = 0'0095, $\hat{q}$ = 1 - 0'0095 = 0'9905, n = 2000, nivel de confianza $1 - \alpha$ =

= 95% = 0'95, de donde α = 0'05 = 5% como *nivel de significación*.

De α = 0'05 tenemos $\alpha/2$ = 0'025

De la igualdad $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'975 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(**p**) = $\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ =

= $\left(0'0095 - 1'96.\sqrt{\frac{0'0095\cdot 0'9905}{2000}}, 0'0095 + 1'96.\sqrt{\frac{0'0095\cdot 0'9905}{2000}}\right) \cong$ **(0'005219; 0'013751).**

Para interpretar el resultado multiplicamos los límites del intervalo (que son probabilidades) por los 2000 artículos, y nos dará al 95% de confianza entre que cantidad de artículos tienen defectuoso el envoltorio.

2000·0'005219 = 10'438, *consideramos 11 artículos.*

2000·0'013751 = 27'502, *consideramos 28 artículos.*

Es decir al 95% de confianza, de los 2000 artículos, puede haber entre 11 y 28 artículos con el envoltorio defectuoso

b)
¿Cuántos artículos, como mínimo, deberá seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99%, la proporción muestral difiera de la proporción real a lo sumo en un 1%?

Datos del problema: $\hat{p} = \frac{19}{2000}$, $\hat{q} = \frac{1981}{200}$, error = E ≤ 1% = 0'01, nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α = 0'01, es decir $\alpha/2$ = 0'01/2 = 0'005.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'005 = 0'995. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, las más próximas son 0'9949 y 0'9951 que corresponden a 2'57 y 2'58, por tanto $z_{1-\alpha/2}$ es la media es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (2'57 + 2'58)/2 = 2'575.

De $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \ge \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'575)^2\cdot\frac{19}{2000}\cdot\frac{1981}{2000}}{(0'01)^2}$ = 623'925, por tanto **el tamaño mínimo de artículos que hay que seleccionar es n = 624.**

OPCION B

16_mod1_sep_EJERCICIO 1 (B)
a) (1'5 puntos) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:
2x - y ≤ -2   4x - 2y ≥ -10   5x - y ≤ 4   x ≥ 0
b) (1 punto) Calcule los valores extremos y mínimo de la función objetivo F(x, y) = 6x - 3y, en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

Solución

(a) y (b) a la vez.
Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:
2x - y ≤ -2   4x - 2y ≥ -10   5x - y ≤ 4   x ≥ 0.
Calcule los valores extremos y mínimo de la función objetivo F(x, y) = 6x - 3y, en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

Función a optimizar es F(x,y) = 6x - 3y.
Restricciones: 2x - y ≤ -2; 4x - 2y ≥ -10 (podemos dividir entre 2); 5x - y ≤ 4; x ≥ 0

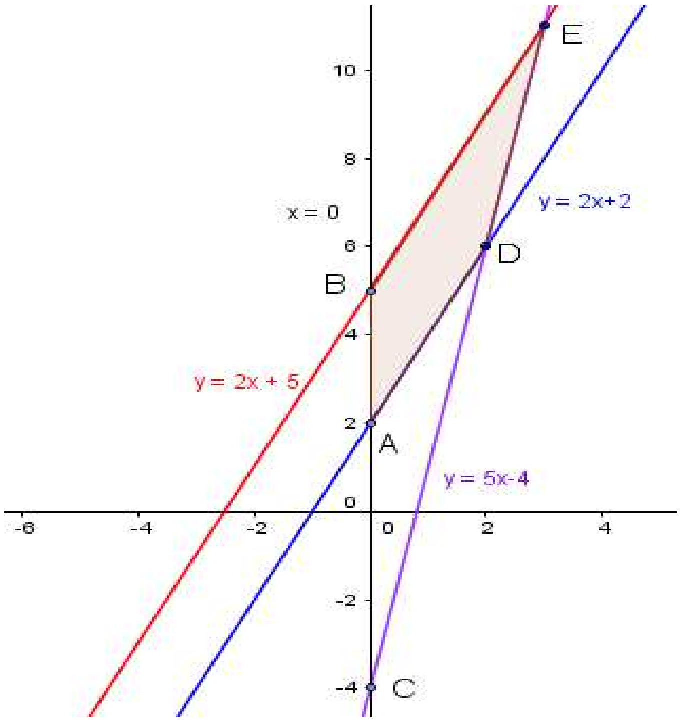
Las desigualdades 2x - y ≤ -2; 2x - y ≥ -5; 5x - y ≤ 4; x ≥ 0, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, 2x - y = -2; 2x - y = -5; 5x - y = 4; x = 0
Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos y = 2x + 2; y = 2x + 5; y = 5x - 4; x = 0

Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

Las rectas y = 2x + 2 e y = 2x + 5, son recta paralelas. (Tienen igual pendiente, el 2, nº que multiplica a "x")

De x = 0 e y = 2x+2, tenemos y = 2, y el punto de corte es A(0,2).
De x = 0 e y = 2x+5, tenemos y = 5, y el punto de corte es B(0,5).
De x = 0 e y = 5x-4, tenemos y = -4, y el punto de corte es C(0,-4).
De y = 2x + 2 e y = 5x - 4, tenemos 2x+2 = 5x-4 → 6 = 3x → 2 = x, con lo cual y = 2(2) + 2 = 6, y el punto de corte es D(2,6).
De y = 2x + 5 e y = 5x - 4, tenemos 2x+5 = 5x-4 → 9 = 3x → 3 = x, con lo cual y = 2(3) + 5 = 11, y el punto de corte es E(3,11).

Dibujamos las rectas, y = 2x + 2; y = 2x + 5; y = 5x - 4; x = 0, tenemos en cuenta las desigualdades, observaremos cual es el polígono convexo, de donde sacaremos los vértices de dicho polígono, pues no todos los puntos de corte son vértices del polígono convexo.



Observamos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(0,2), B(0,5), E(3,11) y D(2,6). *El punto de corte C(0,-4) no es vértice del polígono convexo.*

Veamos la solución óptima de la función F(x,y) = 6x - 3y en el recinto anterior, así como los vértices en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,2), B(0,5), E(3,11) y D(2,6). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,2) = 6(0) – 3(2) **= -6**; **<u>F(0,5)</u>** = 6(0) – 3(5) **<u>= -15</u>**;
<u>F(3,11)</u> = 6(3) – 3(11) **<u>= -15</u>**; **F(2,6)** = 6(2) – 3(6) **= -6**.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es -6** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en los vértices A(0,2) y D(2,6), por tanto se alcanza en todos los puntos del segmento AD, y el mínimo absoluto de la función F en la región es -15 (el menor valor en los vértices) y se alcanza en los vértices B(0,5) y E(3,11), por tanto se alcanza en todos los puntos del segmento BE.**

16_mod1_sep_EJERCICIO 2 (B)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + a & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

a) (1'3 puntos) Calcule el valor de "a" para que la función sea continua en x = 2. Para ese valor de "a" obtenido, ¿es derivable la función en x = 2?
b) (1'2 puntos) Para a = 4, estudie la monotonía y calcule las ecuaciones de las asíntotas, si existen.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + a & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

a)
Calcule el valor de "a" para que la función sea continua en x = 2. Para ese valor de "a" obtenido, ¿es derivable la función en x = 2?

Estudiamos la continuidad en x = 2.

f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 4x + a) = (2)^2 - 4(2) + a = -4 + a$.

$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2-1} = 1$, como tienen que ser iguales tenemos -4+a = 1, de donde **a = 5.**

f(x) es derivable en x = 2 si f '(2⁻) = f '(2⁺) (Vemos la continuidad de la derivada) *la hacemos con a = 5.*

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 2 \\ \frac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x - 4) = 2(2) - 3 = 1$**.**

$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1$.

Como $f'(2^-) = 1 \neq f'(2^+) = -1$, **la función f(x) no es derivable en x = 2, para a = 5**.

b)

Para a = 4, estudie la monotonía y calcule las ecuaciones de las asíntotas, si existen.

Para a = 4 tenemos $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ y $f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 2 \\ \frac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Ya hemos visto que la función no es continua en x = 2 para a = 4 (lo era con a =5), por tanto tampoco es derivable en x = 2.

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada f '(x).

Si x < 2, f '(x) = 2x - 4.

De f '(x) = 0, tenemos 2x - 4 = 0, luego x = 2, que no está en el dominio (x < 2) y **no es** un posible extremo relativo.

Como f '(0) = 2(0) – 4 = - 4 < 0, **f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (-∞,2).**

Si x > 2, $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$.

De f '(x) = 0 tenemos -1 = 0, lo cual es absurdo, es decir f siempre es creciente o decreciente en x > 2.

Como $f'(3) = \frac{-1}{(3-1)^2} = -1/4 < 0$, **f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (2,+∞).**

Por tanto f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ **en R.**

Veamos las asíntotas.

Para x < 2, tenemos $f(x) = x^2 - 4x + 4$ que es una función polinómica y **no tiene asíntotas**.

Para x ≥ 2, tenemos $f(x) = \frac{1}{x-1}$, cuya gráfica es un hipérbola y tiene asíntota vertical (número que anula el denominador, <u>si está en el dominio</u>) y asíntota horizontal (en este caso en + ∞).

De x - 1 = 0, tenemos x = 1, que no está en el dominio x ≥ 2, **luego no tiene asíntota vertical.**

Como $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{x-1}\right) = 1/+\infty = 0^+$, **la recta y = 0 es una asíntota horizontal en - ∞**, y la gráfica de la función está por encima de la asíntota horizontal en + ∞.

16_mod1_sep_EJERCICIO 3 (B)

El aparcamiento de una sala de conciertos está completo el 85% de los días. El 90% de los días que el aparcamiento está completo, la sala de conciertos está llena, y el 22% de los días que el aparcamiento no está completo, la sala de conciertos no está llena.

Elegido un día al azar,

a) (1'5 punto) ¿cuál es la probabilidad de que la sala de conciertos esté llena?

b) (1 punto) Si se sabe que la sala de conciertos esté llena, ¿cuál es la probabilidad de que el aparcamiento esté completo?

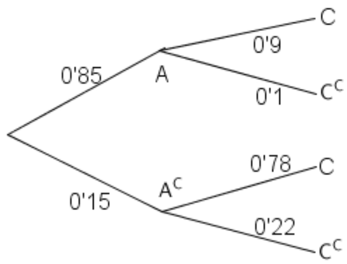
Solución

El aparcamiento de una sala de conciertos está completo el 85% de los días. El 90% de los días que el aparcamiento está completo, la sala de conciertos está llena, y el 22% de los días que el aparcamiento no está completo, la sala de conciertos no está llena.
Elegido un día al azar,
a)
¿cuál es la probabilidad de que la sala de conciertos esté llena?

Llamemos A, A^C, C y C^C, a los sucesos siguientes, “el aparcamiento está completo”, "el aparcamiento no está completo", "la sala de conciertos está llena" y "la sala de conciertos no está llena", respectivamente.

Datos del problema p(A) = 85% = 0’85; p(C/A) = 90% = 0’9 ; $p(C^C/A^C)$ = 22% = 0’22, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total :
p(sala de conciertos llena) = p(C) = $p(A).p(C/A) + p(A^C).p(C/A^C)$ =
= (0’85)·(0’9) + (0’15)·(0’78) **= 441/500 = 0’882**.
b)
Si se sabe que la sala de conciertos esté llena, ¿cuál es la probabilidad de que el aparcamiento esté completo?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(A/C)} = \frac{p(A\cap C)}{p(C)} = \frac{p(A).p(C/A)}{p(C)} = \frac{(0'85)\cdot(0'9)}{0'882} \cong \mathbf{0'867347}.$$

16_mod1_sep_EJERCICIO 4 (B)
a) (1’25 puntos) Se desea tomar una muestra estratificada de las personas mayores de edad de un municipio, cuyos estratos son los siguientes intervalos de edades, en años: de 18 a 30, de 31 a 45, de 45 a 60 y mayores de 60. En el primer intervalo hay 7500 personas, en el segundo 8400, en el tercero 5700 y en el cuarto 3000. Calcule el tamaño de la muestra total y su composición, sabiendo que el muestreo se hace con afijación proporcional y se han elegido 375 personas del primer estrato.
b) (1’25 puntos) Dada la población {2,4,6}, construya todas las muestras posibles de tamaño 2, que puedan formar mediante muestreo aleatorio simple, y halle la varianza de las medias muestrales de todas las muestras.

Solución

a)
Se desea tomar una muestra estratificada de las personas mayores de edad de un municipio, cuyos estratos son los siguientes intervalos de edades, en años: de 18 a 30, de 31 a 45, de 45 a 60 y mayores de 60. En el primer intervalo hay 7500 personas, en el segundo 8400, en el tercero 5700 y en el cuarto 3000. Calcule el tamaño de la muestra total y su composición, sabiendo que el muestreo se hace con afijación proporcional y se han elegido 375 personas del primer estrato.

Sabemos que en un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, si hay “k” estratos y que el número de elementos de cada estrato es N_1, N_2, ..., N_k, y si n_1, n_2, ..., n_k son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra es $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$, y se calculan eligiendo los números n_1, n_2, ..., n_k proporcionales a los tamaños de los estratos N_1, N_2, ..., N_k, es decir

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

En nuestro caso tenemos:

$$\frac{n}{N} = \frac{n}{7500+8400+5700+3000} = \frac{n}{24600} = \frac{375}{7500} = \frac{n_2}{8400} = \frac{n_3}{5700} = \frac{n_4}{3000}$$

De $\frac{n}{24600} = \frac{375}{7500}$, tenemos $n = \frac{375\cdot 24600}{7500}$ = 1230, luego **el tamaño total de la muestra es n = 1230 personas**.

De $\frac{375}{7500} = \frac{n_2}{8400}$, tenemos $n_2 = \frac{375\cdot 8400}{7500}$ = 420, luego **hay 420 personas de 31 a 45 años**.

De $\frac{375}{7500} = \frac{n_3}{5700}$, tenemos $n_3 = \frac{375\cdot 5700}{7500}$ = 285, luego **hay 285 personas de 35 a 60 años**.

De $\frac{375}{7500} = \frac{n_4}{3000}$, tenemos $n_4 = \frac{375\cdot 3000}{7500}$ = 285, luego **hay 150 personas mayores de 60 años**.

b)
Dada la población {2,4,6}, construya todas las muestras posibles de tamaño 2, que puedan formar mediante muestreo aleatorio simple, y halle la varianza de las medias muestrales de todas las muestras.

Supongo que el muestreo es con reemplazamiento. Hay 9 muestra con reemplazamiento de tamaño 2. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

Muestras de tamaño 2	2 2	2 4	2 6	4 2	4 4	4 6	6 2	6 4	6 6
Media de la muestra $\overline{x}_i$	2	3	4	3	4	5	4	5	6

La media poblacional es μ = (2 + 4 + 6)/3 = 12/3 **= 4.**

La varianza poblacional es $\sigma^2 = \frac{\sum n_i\cdot(x_i - \overline{x})^2}{N} = \frac{(2-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2}{3} = \frac{8}{3}$.

El Teorema Central del Límite nos afirma que la media muestral coincide con la media poblacional, es decir $\mu = \overline{x}$, y que la varianza de la distribución muestral de medias σ_x^2 coincide con la varianza de la de la población σ^2, dividida por el tamaño de la muestra **n**, es decir $\sigma_x^2 = \sigma^2/n$.

En nuestro caso la media muestral es $\overline{x} = \mu = 4$, y la varianza de las medias muestrales $\sigma_x^2 = \sigma^2/n$ =
= (8/3)/2 = 8/6 **= 4/3.**

También se podría hacer estudiando la distribución muestral de medias, como puede verse en la tabla que sigue.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i\cdot(x_i)^2$
2	1	2	4
3	2	6	18
4	3	12	48
5	2	10	50
6	1	6	36
$\sum$	**N = 9**	**36**	**156**

La media de la distribución muestral de medias (media de medias) es: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} = \frac{36}{9}$ **= 4**, que coincide con la media de la población μ **= 4**

La varianza de la distribución muestral de medias es: $\sigma_x^2 = \frac{\sum n_i\cdot(x_i)^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{156}{9} - (4)^2$ **= 4/3**, que coincide con la varianza de la de la población σ^2, dividida por el tamaño de la muestra **n**; es decir $\sigma_x^2 = \sigma^2/n = 4/3$.