OPCIÓN A

18_mod4_sep_EJERCICIO 1 (A)

Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$x + 2y \le 11 \qquad x \ge 2y - 5 \qquad 3x + y \le 18 \qquad x \ge 0 \qquad y \ge 0$

a) (1'8 puntos) Represente gráficamente la región que definen y calcule sus vértices.
b) (0'5 puntos) Halle los puntos de esa región en los que la función F(x,y) = 2x + 3y alcanza los valores mínimo y máximo y calcule dichos valores.
b) (0'2 puntos) Justifique si el punto (5'5, 2) pertenece a la región factible.

Solución

Sea el siguiente sistema de inecuaciones: $x + 2y \le 11 \quad x \ge 2y - 5 \quad 3x + y \le 18 \quad x \ge 0 \quad y \ge 0$

a)
Represente gráficamente la región que definen y calcule sus vértices.

Es un problema de programación lineal.

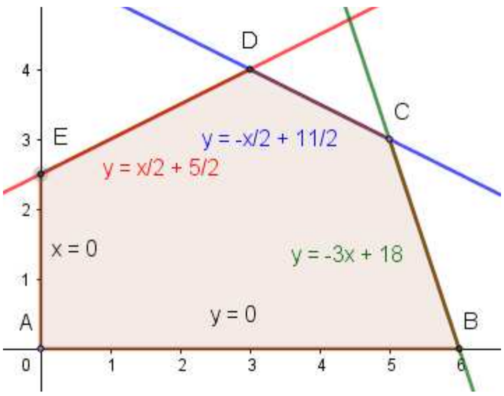
Función a optimizar es F(x,y) = 2x + 3y.
Restricciones: $x + 2y \le 11$; $x \ge 2y - 5$; $3x + y \le 18$; $x \ge 0$; $y \ge 0$.

Las desigualdades $x + 2y \le 11$; $x \ge 2y - 5$; $3x + y \le 18$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $x + 2y = 11$; $x = 2y - 5$; $3x + y = 18$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$y = -x/2 + 11/2$; $y = x/2 + 5/2$; $y = -3x + 18$; $x = 0$; $y = 0$.

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, nos fijamos en las desigualdades y observamos el polígono conexo cerrado limitado por los vértices A, B, C, D y E de los cortes de dichas rectas, cuyos lados son los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = 0$, tenemos el vértice es A(0, 0).
De $y = 0$ e $y = -3x + 18$, tenemos $0 = -3x + 18$, es decir $3x = 18$, luego $x = 6$, y el vértice es B(6, 0).
De $y = -3x + 18$ e $y = -x/2 + 11/2$, tenemos $-3x + 18 = - x/2 + 11/2 \rightarrow -6x + 36 = - x + 11 \rightarrow 25 = 5x$, con lo cual $x = 5$ e $y = -3(5) + 18 = 3$, y el vértice es C(5, 3).
De $y = -x/2 + 11/2$ e $y = x/2 + 5/2$, tenemos $-x/2 + 11/2 = x/2 + 5/2 \rightarrow -x + 11 = x + 5 \rightarrow 6 = 2x$, con lo cual $x = 3$ e $y = (3)/2 + 5/2 = 4$, y el vértice es D(3, 4).
De $x = 0$ e $y = x/2 + 5/2$, tenemos $y = 5/2$, y el vértice es E(0, 5/2).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(0, 0), B(6, 0), C(5, 3), D(3, 4) y E(0, 5/2).

b)
Halle los puntos de esa región en los que la función F(x,y) = 2x + 3y alcanza los valores mínimo y máximo y calcule dichos valores.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los vértices anteriores A(0, 0), B(6, 0), C(5, 3), D(3, 4) y E(0, 5/2). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F_A(0, 0) = 2(0) + 3(0) **= 0**; F_B(6, 0) = 2(6) + 3(0) = 12; **F_C(5, 3) =** 2(5) + 3(3) **= 19**;
F_D(3, 4) = 2(3) + 3(4) = 18; F_E(0, 5/2) = 2(0) + 3(5/2) = 7'5.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 19** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(5, 3),** y e**l mínimo absoluto de la función F en la región es 0** (el menor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice A(0, 0).**
b)
Justifique si el punto (5'5, 2) pertenece a la región factible.

El punto (5'5, 2) pertenece a la región factible si verifica todas las inecuaciones:

$x + 2y \le 11$	$\rightarrow$	$(5'5) + 2(2) \le 11$	$\rightarrow$	$9'5 \le 11$. CIERTO
$x \ge 2y - 5$	$\rightarrow$	$(5'5) \ge 2(2) - 5$	$\rightarrow$	$5'5 \ge -1$. CIERTO
$3x + y \le 18$	$\rightarrow$	$3(5'5) + (2) \le 18$	$\rightarrow$	$18'5 \le 18$. **FALSO**
$x \ge 0$	$\rightarrow$	$(5'5) \ge 0$. CIERTO		
$y \ge 0$	$\rightarrow$	$(2) \ge 0$. CIERTO		

La respuesta es negativa, porque el punto (5'5, 2) no verifica todas las inecuaciones de la región factible.

18_mod4_sep_EJERCICIO 2 (A)
El consumo de cereales en una ciudad, en miles de toneladas, viene dado por la función
$c(t) = t^3 - 15t^2 + 63t + 10$, para $0 \le t \le 12$, donde t representa el tiempo.
a) (0'8 puntos) ¿En qué instante se alcanza el máximo consumo de cereales y cuantas toneladas se consumen en ese momento?
b) (0'7 puntos) ¿En qué intervalo de tiempo decrece el consumo de cereales?
c) (1 punto) Represente gráficamente la función.

Solución

El consumo de cereales en una ciudad, en miles de toneladas, viene dado por la función
$c(t) = t^3 - 15t^2 + 63t + 10$, para $0 \le t \le 12$, donde t representa el tiempo.
a)
¿En qué instante se alcanza el máximo consumo de cereales y cuantas toneladas se consumen en ese momento?

La la función $c(t) = t^3 - 15t^2 + 63t + 10$ es polinómica por tanto continua y derivable en R las veces que hagan falta, en concreto es continua en el cerrado [0, 12] y derivable en el abierto (0, 12).

Sabemos que los extremos absolutos de la función c se encuentran en los extremos del intervalo [0, 12] y en las soluciones de la ecuación c '(t) = 0.

$c(t) = t^3 - 15t^2 + 63t + 10$; $c'(t) = 3t^2 - 30t + 63$.

De $c'(t) = 0 \rightarrow 3t^2 - 30t + 63 = 0 \rightarrow t^2 - 10t + 21 = 0 \rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2}$, de donde t = 7 y t = 3.

Evaluamos la función c(t) en los valores t = 0, t = 3, t = 7 y t = 12. El mayor valor será el máximo absoluto y el menor valor es el mínimo absoluto.

c(0) = $(0)^3 - 15(0)^2 + 63(0) + 10$ **= 10**.
c(3) = $(3)^3 - 15(3)^2 + 63(3) + 10 = 91$.
c(7) = $(7)^3 - 15(7)^2 + 63(7) + 10 = 59$.
c(12) = $(12)^3 - 15(12)^2 + 63(12) + 10$ **= 334**.

El mínimo absoluto es 10 y de alcanza en t = 0 y el máximo absoluto es 334 y se alcanza en t = 12, **por tanto el máximo consumo de cereales es de 334 toneladas y se alcanza en el tiempo t = 12.**
b)
¿En qué intervalo de tiempo decrece el consumo de cereales?

Me piden la monotonía, es decir el estudio de la primera derivad c '(t)

$c(t) = t^3 - 15t^2 + 63t + 10$; $c'(t) = 3t^2 - 30t + 63$.

Ya hemos visto en el apartado (a) que las soluciones de c ‘(t) = 0 eran t = 3 y t = 7. (recordamos que trabajamos en el intervalo $0 \le t \le 12$)

Como c ‘(1) = $3(1)^2 – 30(1) + 63 = 34 > 0$, la función c es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (0, 3).

Como c ‘(5) = $3(5)^2 – 30(5) + 63 = - 12 < 0$, la función c es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (3, 7).

Como c ‘(10) = $3(10)^2 – 30(10) + 63 = 63 > 0$, la función c es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (7, 12).

El consumo de cereales decrece en el intervalo de tiempo 3 < t < 7.

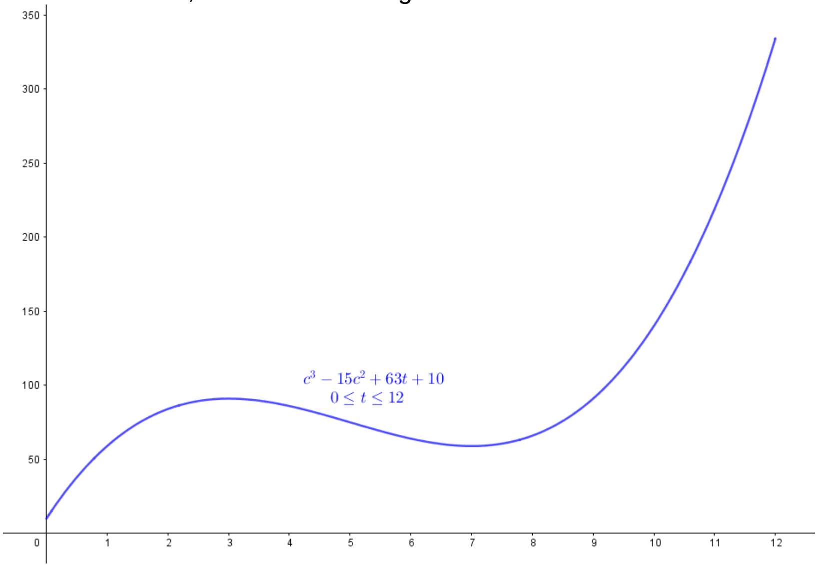
Por definición t = 3 es un máximo relativo, que vale c(3) = 91.

Por definición t = 7 es un mínimo relativo, que vale c(7) = 59.

c)

Represente gráficamente la función.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, un esbozo de la gráfica es:



18_mod4_sep_EJERCICIO 3 (A)

En una localidad, el 25% de los habitantes asiste periódicamente a la consulta del dentista, el 10% se hace una analítica y el 8% hace ambas cosas.

a) (0’5 puntos) ¿Razone si los sucesos “Asistir a la consulta del dentista” y “Hacerse una analítica” son independientes?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de habitantes ni se hace una analítica ni va al dentista?

c) (1 punto) Si elegimos un habitante al azar de esa localidad de entre los que van al dentista, ¿cuál es la probabilidad de que se haga una analítica?

Solución

En una localidad, el 25% de los habitantes asiste periódicamente a la consulta del dentista, el 10% se hace una analítica y el 8% hace ambas cosas.

a)

¿Razone si los sucesos “Asistir a la consulta del dentista” y “Hacerse una analítica” son independientes?

Sean los sucesos A = ”Asistir a la consulta del dentista” y B = “Hacerse una analítica”.

Nos dan p(A) = 25% = 0’25, p(B) = 10% = 0’1, p(hace ambas cosas) = $p(A \cap B)$ = 8% = 0’08

Sabemos que dos sucesos A y B son independientes si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Como $p(A \cap B)$ = 0’08 ≠ 0’25·0’1 = $p(A) \cdot p(B)$, los sucesos A y B no son independientes.

b)

¿Qué porcentaje de habitantes ni se hace una analítica ni va al dentista?

Sabemos que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ = 0’25 + 0’1 - 0’08 = 0’27.

Me piden **p(noA y noB) = p($A^C \cap B^C$) =** {Ley de Morgan} = p($A \cup B$)^C = {suceso contrario} = 1 - p($A \cup B$) =
= 1 - 0'27 **= 0'73 = 73%.**

c)
Si elegimos un habitante al azar de esa localidad de entre los que van al dentista, ¿cuál es la probabilidad de que se haga una analítica?

Me están pidiendo **p(B sabiendo que se ha realizado A) = p(B/A) =** $\frac{p(B \cap A)}{p(A)}$ = 0'08/0'25 **= 8/25 =**

= 0'32.

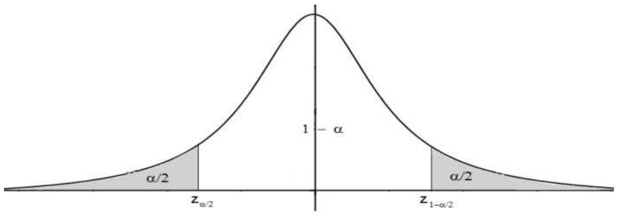
18_mod4_sep_EJERCICIO 4 (A)

En una zona escolar formada por tres centros de secundaria, se desea estimar la proporción de este alumnado que lleva teléfono móvil al instituto. Se toma una muestra aleatoria simple de 121 estudiantes, de los cuales 74 lo llevan.
a) (1'2 puntos) Determine un intervalo de confianza al 97% para la proporción de estudiantes que son usuarios que lleva el móvil al instituto. ¿Entre qué dos porcentajes esa proporción a ese nivel de confianza?
b) (0'5 puntos) Si con la misma muestra se disminuye el nivel de confianza, ¿qué efecto tendrá esta disminución en el error de la estimación?
c) (0'8 puntos) Si en la misma zona se elige mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional otra muestra de 121 estudiantes, considerando que el segundo centro escolar tiene el doble de alumnos que el primero y el tercero tiene el triple que el primero, ¿Cuántos alumnos de cada centro se deben tomar para construir la muestra?

Solución

En una zona escolar formada por tres centros de secundaria, se desea estimar la proporción de este alumnado que lleva teléfono móvil al instituto. Se toma una muestra aleatoria simple de 121 estudiantes, de los cuales 74 lo llevan.

Sabemos que para la proporción poblacional **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$, sigue una $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$, y generalmente escribimos $\hat{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ o $\hat{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que en la proporción es $\hat{p} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es E =
= $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, para el intervalo de la proporción. Pero la amplitud del intervalo es b - a = $2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n = $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2}$ =
= $\frac{2\cdot(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{(b-a)^2}$.

a)
Determine un intervalo de confianza al 97% para la proporción de estudiantes que son usuarios que lleva el móvil al instituto. ¿Entre qué dos porcentajes esa proporción a ese nivel de confianza?

Datos del problema: n = 121, $\hat{p}$ = 74/121 = 0'76, $\hat{q}$ = 1 - $\hat{p}$ = 1– 74/121 = 47/121, nivel de confianza =97% =
= 0'97 = 1 - α, de donde α = 0'03, con la cual α/2 = (0'03)/2 = 0'015.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 si viene y corresponde a 2'17, luego $z_{1-\alpha/2} = 2'17$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) =$$

$$= \left((74/121) - 2'17\cdot\sqrt{\frac{(74/121)\cdot(47/121)}{121}}, (74/121) + 2'17\cdot\sqrt{\frac{(74/121)\cdot(47/121)}{121}}\right) \cong$$

$$\cong \mathbf{(0'515421;\ 0'70772)} \cong \{\text{en porcentaje}\} \cong \mathbf{(51'5421\%;\ 70'772\%)}$$

b)
Si con la misma muestra se disminuye el nivel de confianza, ¿qué efecto tendrá esta disminución en el error de la estimación?

Si nos fijamos en el dibujo de arriba, **si disminuye el nivel de confianza $1 - \alpha$, también disminuye el punto crítico $z_{1-\alpha/2}$, y por tanto también disminuye el error = E =** $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, con lo cual aumenta el intervalo de confianza $I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$.

c)
Si en la misma zona se elige mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional otra muestra de 121 estudiantes, considerando que el segundo centro escolar tiene el doble de alumnos que el primero y el tercero tiene el triple que el primero, ¿Cuántos alumnos de cada centro se deben tomar para construir la muestra?

Nos están diciendo que el segundo centro tiene el doble de alumnos que el primero y el tercero tiene el triple que el primero

Lamamos N_1, N_2 y N_3 al número de alumnos del primer, segundo y tercer centro.

Por un lado tenemos $N_1 + N_2 + N_3 = 121$, y por otro lado $N_2 = 2\cdot N_1$ y $N_3 = 3\cdot N_1$., por tanto:
De $N_1 + N_2 + N_3 = 121$, $\rightarrow$ $N_1 + 2\cdot N_1 + 3\cdot N_1 = 121$, $\rightarrow$ $6\cdot N_1 = 121$, de donde $\rightarrow$ $N_1 = 121/6 \cong 20'16$. El número de alumnos es entero luego si tomamos $N_1 = 20$, tenemos $N_2 = 2\cdot 20 = 40$ y $N_3 = 3\cdot 20$ 0= 60, pero al sumar sale 120 no 121, por tanto hay que tomar un alumno más de un centro y tenemos tres soluciones posibles:

Número de alumnos: $(N_1, N_2, N_3) = (21, 40, 60)$ o $(N_1, N_2, N_3) = (20,41,60)$ o $(N_1, N_2, N_3) = (20, 40, 61)$.

OPCION B

18_mod4_sep_EJERCICIO 1 (B)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule $A^{2018} + A^{2019}$.
b) (1 puntos) Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A + B\cdot B^t = 2A$.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a)
Calcule $A^{2018} + A^{2019}$.

$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$; $A^3 = A^2\cdot A = I_2\cdot A = A$; $A^{2\cdot(1009)} = (I_2)^{1009} = I_2$.

$A^{2018} + A^{2019} = A^{2018} + A^{2018}\cdot A = I_2 + I_2\cdot A = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b)
Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A + B\cdot B^t = 2A$.

De la ecuación matricial $X\cdot A + B\cdot B^t = 2A$ tenemos matricial $X\cdot A = 2A – BB^t$.

Como det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ = -1 - 0 = -1 $\neq$ 0, existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj((A)^t)$.

De X·A = 2A – BB^t, multiplicando ambos miembros por la derecha por A^{-1} tenemos:
X·A·A^{-1} = (2A – BB^t)·A^{-1} → X·I = (2A – BB^t)·A^{-1} → **X = (2A – BB^t)·A^{-1}**.
Calculamos $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj((A)^t)$, |A| = -1; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; Adj($A^t$) = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj((A)^t) = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Lo podríamos obtener de la definición: De $A^2 = I_2$, A^{-1} = A.

Tenemos 2A – BB^t = $2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

Luego la matriz es **X = (2A – BB^t)·A^{-1} =** $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$

18_mod4_sep_EJERCICIO 2 (B)

El beneficio, en miles de euros, que ha obtenido una almazara lo largo de 50 años viene dado por

$$B(t) = \begin{cases} -0'04t^2 + 2'4t & \text{si} \quad 0 \le t < 40 \\ \dfrac{40t - 320}{t} & \text{si} \quad 40 \le t \le 50 \end{cases}$$, donde t es el tiempo transcurrido.

a) (1 punto) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función B(t) en el intervalo [0, 50].
b) (1 punto) Estudie la monotonía de la función B(t) y determine en que momento fueron mayores los beneficios de la almazara, así como el beneficio máximo.
c) (0’5 puntos) Represente la gráfica de la función y explique la evolución del beneficio.

Solución

El beneficio, en miles de euros, que ha obtenido una almazara lo largo de 50 años viene dado por

$$B(t) = \begin{cases} -0'04t^2 + 2'4t & \text{si} \quad 0 \le t < 40 \\ \dfrac{40t - 320}{t} & \text{si} \quad 40 \le t \le 50 \end{cases}$$, donde t es el tiempo transcurrido.

a)
Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función B(t) en el intervalo [0, 50].

Sabemos que la función $-0'04t^2 + 2'4t$ es continua y derivable en todo R, en particular es continua en el intervalo [0, 40) y derivable en el abierto (0, 40).

Sabemos que la función $\frac{40t - 320}{t}$ es continua y derivable en todo R – {0}, en particular es continua en el intervalo [40, 50] y derivable en el abierto (40, 50).

Falta ver la continuidad y derivabilidad en t = 40.

B(t) es continua en t = 40 si $B(40) = \lim_{t\to 40^-} B(t) = \lim_{t\to 40^+} B(t)$.

$\lim_{t\to 40^-} B(t) = \lim_{t\to 40^-} (-0'04t^2 + 2'4t) = -0'04(40)^2 + 2'4(40) = 32$

$B(40) = \lim_{t\to 40^+} B(t) = \lim_{t\to 40^+}\left(\frac{40t - 320}{t}\right) = \frac{40(40) - 320}{(40)} = 32$, por tanto **la función B(t) es continua en t = 40, por tanto es continua en [0, 50].**

B(t) es derivable en t = 40 si B ‘(2^-) = B ‘(2^+) (Vemos la continuidad de la derivada)

$$B(t) = \begin{cases} -0'04t^2 + 2'4t & \text{si} \quad 0 \le t < 40 \\ \dfrac{40t - 320}{t} & \text{si} \quad 40 \le t \le 50 \end{cases};$$

$$B'(t) = \begin{cases} -0'08t + 2'4 & \text{si} \quad 0 < t < 40 \\ \dfrac{40t - (40t - 320)}{(t)^2} & \text{si} \quad 40 < t < 50 \end{cases} = \begin{cases} -0'08t + 2'4 & \text{si} \quad 0 < t < 40 \\ \dfrac{320}{t^2} & \text{si} \quad 40 < t < 50 \end{cases}$$

B '(40^-) = $\lim_{t\to 40-}$ B '(t) = $\lim_{t\to 40-}$ (-0'08t + 2'4) = -0'08(40) + 2'4 = -0'8.

B '(40^+) = $\lim_{t\to 40+}$ B '(x) = $\lim_{t\to 40+}\left(\frac{320}{t^2}\right) = \frac{320}{(40)^2}$ = 0'2.

Como B '(40^-) = -0'8 $\neq$ B '(40^+) = 0'2, la función B no es derivable en t = 40, luego es derivable en (0, 50) – {40}.

b)

Estudie la monotonía de la función B(t) y determine en que momento fueron mayores los beneficios de la almazara, así como el beneficio máximo.

$$B(t) = \begin{cases} -0'04t^2 + 2'4t & \text{si } 0 \le t < 40 \\ \dfrac{40t - 320}{t} & \text{si } 40 \le t \le 50 \end{cases} ; \quad B'(t) = \begin{cases} -0'08t + 2'4 & \text{si } 0 < t < 40 \\ \dfrac{320}{t^2} & \text{si } 40 < t < 50 \end{cases}$$

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada B '(x).

Si 0 < t < 40, B '(t) = -0'08t + 2'4.

De B '(t) = 0, tenemos -0'08t + 2'4 = 0 $\rightarrow$ 0'08t = 2'4 $\rightarrow$ t = 2'4/0'08 = 30 que sería un posible extremo relativo.

Como B '(10) = -0'08(10) + 2'4 = 1'6 > 0, B(t) es estrictamente creciente ($\nearrow$) en (0,30).

Como B '(35) = -0'08(35) + 2'4 = -0'4 < 0, B(t) es estrictamente decreciente ($\searrow$) en (30,40).

Por definición t = 30 es un máximo relativo que vale B(30) = - 0'04(30)^2 + 2'4(30) = 36.

Si 40 < t < 50, B '(t) = $B'(t) = \frac{320}{t^2}$.

Como $B'(45) = \frac{320}{45^2} \cong 0'158 > 0$, f(x) es estrictamente creciente ($\nearrow$) en (40, 50).

Por definición t = 40 es un mínimo relativo, *no derivable*, que vale $B(40) = \frac{40(40) - 320}{40}$ = 32.

Sabemos que los extremos absolutos se pueden alcanzar en los extremos del intervalo t = 0 y t = 50, los puntos donde B '(t) = 0, t = 30 y los puntos donde B(t) no es continua o derivable, t = 40.

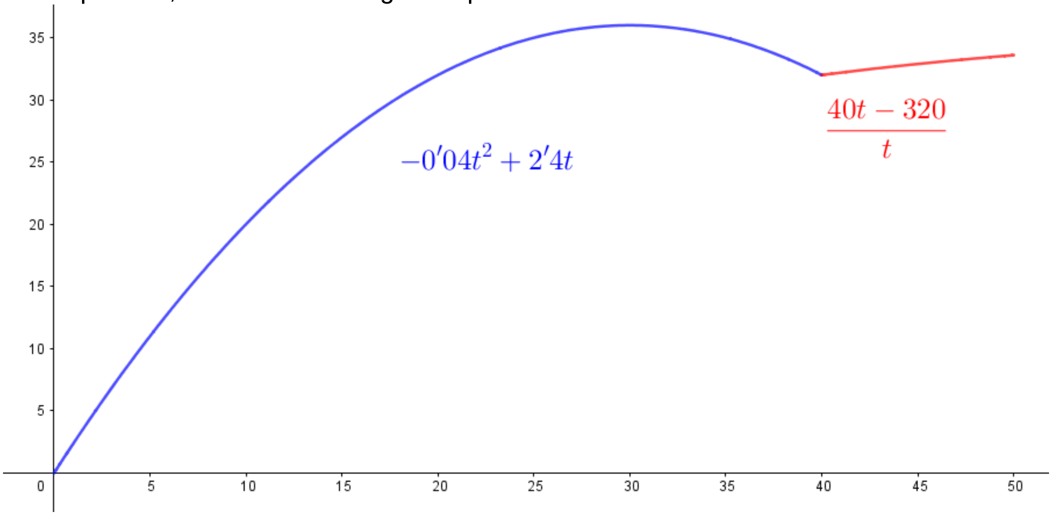
Tenemos B(0) = 0, **B(30) = 36**, B(40) = 32 y B(50) = (40(50) – 320)/(50) = 33'6.

Luego el máximo absoluto es 36 y se alcanza en t = 30, es decir **los máximos beneficios de la almazara es 36000 € y se alcanza en el año t = 30.**

c)

Represente la gráfica de la función y explique la evolución del beneficio.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, que la gráfica de - 0'04t^2 + 2'4t es un trozo de parábola con las ramas hacia abajo (el número que multiplica a t^2 es negativo) con vértice en V(30, 36) y que la gráfica de $\frac{40t - 320}{t}$ es un trozo de hipérbola, un esbozo de la gráfica pedida es :



Teniendo en cuenta lo anterior **el beneficio crece desde el año 0 hasta el año 30, decrece del año 30 al 40 y vuelve a crecer del año 40 al 50.**

18_mod4_sep_EJERCICIO 3 (B)
Un hotel dispone de tres lavadoras industriales L_1, L_2 y L_3 para el servicio de lavandería. El 50% de los lavados los realiza L_1, el 30% los hace L_2 y el resto L_3. La lavadora L_1 produce un 5% de lavados defectuosos, L_2 produce un 15% y L_3 un 20%. Se elige al azar un lavado de hotel.
a) (1'5 puntos) Calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el lavado haya sido realizado por L_1, sabiendo que ha sido defectuoso.

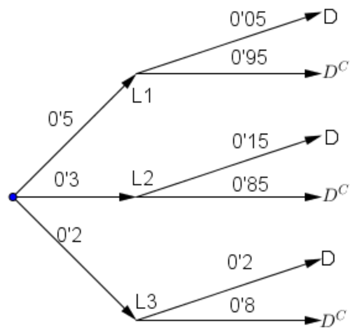
Solución

Un hotel dispone de tres lavadoras industriales L_1, L_2 y L_3 para el servicio de lavandería. El 50% de los lavados los realiza L_1, el 30% los hace L_2 y el resto L_3. La lavadora L_1 produce un 5% de lavados defectuosos, L_2 produce un 15% y L_3 un 20%. Se elige al azar un lavado de hotel.

Llamemos L_1, L_2, L_3, D y D^C, a los sucesos siguientes, "Lavadora L_1", "Lavadora L_2", "Lavadora L_3", "lavado defectuoso" y " lavado no defectuoso", respectivamente.

Además tenemos $p(L_1) = 50\% = 0'5$, $p(L_2) = 30\% = 0'3$, $p(D/L_1) = 5\% = 0'05$, $p(D/L_2) = 15\% = 0'15$ y $p(D/L_3) = = 20\% = 0'2$.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
Calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que no sea defectuoso es:

$$\mathbf{p(D^C)} = p(L1)\cdot p(D^C/L1) + p(L2)\cdot p(D^C/L2) + p(L3)\cdot p(D^C/L3) =$$
$$= (0'5)\cdot(0'95) + (0'3)\cdot(0'85) + (0'2)\cdot(0'8) \mathbf{= 0'89.}$$

b)
Calcule la probabilidad de que el lavado haya sido realizado por L_1, sabiendo que ha sido defectuoso.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(L1/D) =} \frac{p(L1\cap D)}{p(D)} = \frac{p(L1)\cdot p(D/L1)}{1 - p(D^C)} = \frac{(0'5)\cdot(0'05)}{1 - 0'89} \mathbf{= 5/22 \cong 0'2273}.$$

18_mod4_sep_EJERCICIO 4 (B)
La edad de los empleados de una empresa sigue una ley Normal de varianza 64 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria simple de 16 empleados de dicha empresa abatiéndose las siguientes edades:

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 37 41 38 40.

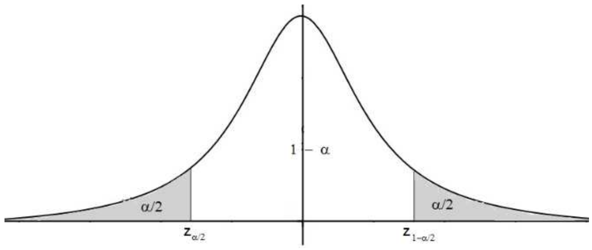
a) (1'5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza para estimar la media de los empleados, con un nivel de confianza del 97%.
b) (1 punto) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la edad media de los empleados, con un error inferior a 2 años y nivel de confianza del 99%.

Solución

La edad de los empleados de una empresa sigue una ley Normal de varianza 64 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria simple de 16 empleados de dicha empresa abatiéndose las siguientes edades:

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 37 41 38 40.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{x}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{x} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{x} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = (a,b)

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

a)
Obtenga un intervalo de confianza para estimar la media de los empleados, con un nivel de confianza del 97%.

Datos del problema: media muestral $\overline{x}$ = (30+42+38+45+52+60+21+26+33+44+28+49+37+41+38+40)/16 = = 39; $\sigma^2 = 64$; σ = 10; n = 16; nivel de confianza = nivel de confianza = 97% = 0'97 = 1 - α, de donde α=0'03, con la cual α/2 = (0'03)/2 = = 0'015.
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 si viene y corresponde a 2'17, luego $z_{1-\alpha/2} = 2'17$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(39 - 2'17\cdot\frac{8}{\sqrt{16}}, 39 + 2'17\cdot\frac{8}{\sqrt{16}}\right)$ **= (34'66,43'34)**

b)
Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la edad media de los empleados, con un error inferior a 2 años y nivel de confianza del 99%.

Datos del problema: σ = 8; error = E < 2; nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α = 0'01, es decir α/2 = 0'01/2 = 0'005.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'005 = 0'995$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, las más próximas son 0'9949 y 0'9951 que corresponden a 2'57 y 2'58, por tanto el punto crítico $z_{1-\alpha/2}$ es la media de ambos valores, es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (2'57 + 2'58)/2 = 2'575.

De el error es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2, tenemos n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'575\cdot 8}{2}\right)^2 \cong 106'09$, tenemos que **el tamaño mínimo de la muestra es de n = 107 empleados.**