PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2018

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{aligned} x+2y+(m+3)z &= 3 \\ x+y+z &= 3m \\ 2x+4y+3(m+1)z &= 8 \end{aligned}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro m.

b) Resuelve el sistema para $m=-2$.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3m+3 \end{vmatrix} = -m+3=0 \Rightarrow m=3$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

$$\text{Si } m=3 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$$

$$\text{Si } m=3 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$$

	R(A)	R(M)	
$m=3$	2	3	S. Incompatible
$m\neq 3$	3	3	S. Compatible determinado

b) Resolvemos el sistema para $m=-2$:

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z &= 3 \\ x+y+z &= -6 \\ 2x+4y-3z &= 8 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{F_2-F_1} \left.\begin{aligned} x+2y+z &= 3 \\ -y &= -9 \\ -5z &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=-\frac{73}{5}\ ;\ y=9\ ;\ z=-\frac{2}{5}$$

a) Justifica que es posible hacer un pago de 34'50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:
utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros
se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas
tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.
¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?
b) Si se redondea la cantidad a pagar a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si llamamos

$x =$ número de monedas de 50 céntimos

$y =$ número de monedas de 1 €

$z =$ número de monedas de 2 €

Planteamos el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 0'5x+y+2z=34'5 \\ x+y+z=30 \\ y=x+z \end{array}\right\}$

Ordenamos y resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ 0'5x+y+2z=34'5 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-0'5F_1+F_2} \left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ 0'5y+1'5z=19'5 \\ -2y=-30 \end{array}\right\} \Rightarrow y=15 \ ; \ z=8 \ ; \ x=7$$

Luego, la solución es única y es utilizando 7 monedas de 50 céntimos, 15 monedas de 1 € y 8 monedas de 2 €.

b) Planteamos y resolvemos el nuevo sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ 0'5x+y+2z=35 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-0'5F_1+F_2} \left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ 0'5y+1'5z=20 \\ -2y=-30 \end{array}\right\} \Rightarrow y=15 \ ; \ z=\frac{25}{3} \ ; \ x=\frac{20}{3}$$

Esta solución no es posible, ya que el número de monedas tiene que ser un número entero positivo, no puede ser decimal.

Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Discute el rango de A según los valores del parámetro λ.
b) Para $\lambda=-2$, estudia y resuelve el sistema dado por $AX=B$.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^3-6\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=1 \ ; \ \lambda=-2$$

Calculamos el rango de la matriz A.

Para $\lambda=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=1$

Para $\lambda=-2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $\lambda \neq 1 \ y \ -2 \Rightarrow R(A)=3$

b) Calculamos el rango de la matriz ampliada para $\lambda=-2$

$$\lambda=-2 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$$

Luego, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y-2z=-1 \\ 2x+2y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{-1+3z}{6} \ ; \ y=\frac{2-3z}{3} \ ; \ z=z$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+mz=1 \\ x+my+z=1 \\ x+2y+4z=m \end{cases}$.

a) Discute el sistema en función del parámetro *m*.

b) Si es posible, resuelve el sistema para $m=1$.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4m+1+2m-m^2-4-2=-m^2+6m-5=0 \Rightarrow m=1\ ;\ m=5$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para $m=1 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

Para $m=5 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-4F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$

Para

$$m=5 \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-4F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$m=1$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m=5$	2	3	Sistema incompatible
$m\neq 1\ y\ 5$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m=1$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z=1 \\ x+2y+4z=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=1+2z\ ;\ y=-3z\ ;\ z=z$$

Considera las matrices: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema dado por $AX=mX$ según los valores del parámetro m.
b) Da la solución del sistema en los casos en que es compatible determinado.
c) Para $m=3$ resuelve el sistema y halla, si es posible, una solución en la que $x+y+z=3$.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $AX=mX \Rightarrow AX-mX=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}-m\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (2-m)x=0 \\ x+(2-m)y+z=0 \\ x+(3-m)z=0 \end{matrix}\right\}$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \end{vmatrix}=(2-m)^2\cdot(3-m)=0 \Rightarrow m=2\ ;\ m=3$$

$$Para\ m=2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=1$$

$$Para\ m=3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$$

	R(A)	
$m=2$	1	S. Compatible indeterminado
$m=3$	2	S. Compatible indeterminado
$m\neq 2\ y\ 3$	3	S. Compatible Determinado

b) Para $m\neq 2\ y\ 3$, el sistema es compatible determinado y tiene la solución trivial $x=y=z=0$

c) Resolvemos el sistema $\left.\begin{matrix} -x=0 \\ x-y+z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \\ z=z \end{cases}$

Veamos si es posible que una solución sea: $x+y+z=3 \Rightarrow z+z=3 \Rightarrow 2z=3 \Rightarrow z=\dfrac{3}{2}$

Luego, la solución es $x=0\ ;\ y=\dfrac{3}{2}\ ;\ z=\dfrac{3}{2}$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left\{\begin{aligned} x - z &= m \\ my + 3z &= 1 \\ 4x + y - mz &= 5 \end{aligned}\right.$

a) Discútelo según los valores del parámetro *m*.

b) Para $m = 1$ resuelve el sistema y encuentra, si es posible, una solución para la que sea $x = z$.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1 ;\ m = 3$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para $m = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$

Para $m = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$

Para

$$m = 3 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$m = 1$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m = 3$	2	3	Sistema incompatible
$m \neq 1\ y\ 3$	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m = 1$, el sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{aligned} x - z = 1 \\ y + 3z = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 + z \\ y &= 1 - 3z \\ z &= z \end{aligned}\right.$

No es posible ya que $x = 1 + z$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{r} x+y+mz=m^2 \\ y-z=m \\ x+my+z=m \end{array}\right.$ **.**

a) Discute el sistema según los valores del parámetro *m*.

b) Resuélvelo para $m=1$. Para dicho valor de *m*, calcula, si es posible, una solución en la que $z=2$.

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 1-1-m+m=0 \Rightarrow R(A)<3$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow R(A)=2$

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m+m-m^2-m^2=2m-2m^2=0 \Rightarrow m=0 \; ; \; m=1$$

Si $m=0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

Si $m=1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2$

	R(A)	R(M)	
$m=0$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m=1$	2	2	S. Compatible indeterminado
$m \neq 0 \ y \ 1$	2	3	S. Incompatible

b) Resolvemos el sistema para $m=1$:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-2z \; ; \; y=1+z \; ; \; z=z$$

Si $z=2 \Rightarrow x=-4 \; ; \; y=3$